الجزء الرابع

الترتيب

الباب الرابع والعشرون

تكوين المتسلسلات

١٨٧ – فكرة الترتيب أو المتسلسلة من الأفكار التي سبق أن تعرضنا لها في معرض الكلام عن المسافة ، وعن ترتيب المقدار . فقد كشف البحث في الاتصال ، وهو البحث الذي أجريناه في الباب الأخير من الجزء الثالث ، عن أنه فكرة الأجدر أن تكون ترتيبية ، ومهد الأذهان للأهمية الأساسية لفكرة الترتيب . وقد حان الوقت الآن لفحص هذه الفكرة في ذاتها . فقد زادت التطورات الحديثة من أهمية الترتيب من الوجهة الرياضية البحتة زيادة لا يمكن المبالغة في وصفها . وقد أثبت كل من ديديكند وكانتور وبيانو كيف يؤسس الحساب والتحليل على متسلسلة من نوع خاص – أي على خواص الأعداد المتناهية والتي بفضلها يتكون ما سأسميه متوالية rogressi . وسنرى أيضا أن الأعداد اللامنطقة تعرف تعريفا تاماً باستخدام الترتيب . وأن فصلا جديدا من الأعداد الترتيبية المتصاعدة transfinite قد أدخل ، وأمكن بفضله الحصول على نتائج في غاية الأهمية والطرافة . وفي مجال الهندسة نجد أن طريقة شتاوت Staudt لرسم الشكل الرباعي التام ، وبحوث بييرى Pieri في الهندسة الإسقاطية قد بينت كيف تجري النقط والخطوط والسطوح المستوية في ترتيب مستقل عن الاعتبارات القياسية وعن المقدار . وذلك على حين نجد أن الهندسة الوصفية تثبت أن قسطا كبيراً من الهندسة لا يتطلب غير احتمال وجود الترتيب المتسلسل . هذا فضلا عن أن فلسفة المكان والزمان بأسرها تتوقف على وجهة النظر التي نسلم بها عن الترتيب . ومن أجل ذلك أصبح البحث في الترتيب جوهرياً في فهم أسس الرياضيات : وهو بحث أغفلته الفلسفات الجارية .

١٨٨ – وتبلغ فكرة الترتيب من التعقيد مبلغاً أكثر من أي فكرة أخرى سبق لنا تحليلها . فلا يمكن لحدين أن يكون لهما ترتيب : بل ولا لثلاثة حدود أن يكون لها ترتيب دوري . ومن أجل هذا التعقيد واجه التحليل المنطقي للترتيب صعوبات

كبيرة . ولذلك سأتناول هذا الموضوع تدريجياً . فأبحث فى هذا الباب الظروف التى ينشأ فيها الترتيب ، مرجئاً البحث فى ماهية الترتيب إلى الباب التالى . وسيثير هذا التحليل عدة مسائل أساسية فى المنطق العام تتطلب بحثاً ضافياً ذا صفة تكاد أن تكون فلسفية بحتة . وعند ذلك أنتقل إلى موضوعات ذات صلة أكثر بالرياضة ، مثل أصناف المتسلسلات والتعريف الترتيبى للأعداد ، وبذلك نمهد السبيل شيئاً فشيئاً للبحث فى اللانهاية والاتصال فى الجزء التالى .

هناك طريقتان مختلفتان يمكن أن ينشأ بهما الترتيب ، ولو أننا سنجد فى نهاية الأمر أن الطريقة الثانية يمكن أن ترد إلى الأولى . ففى الطريقة الأولى يتكون ما يمكن أن تسميه بالعنصر الترتيبى من حدود ثلاثة ا ، ب ، حـ يقع أحدهما (ب مثلا) بين الحدين الآخرين . وهذا يحدث دائما عندما تقوم علاقة «بين» Between ا ، ب وبين ب ، حـ لا تقوم بين ب ، ا ، أو بين حـ ، ب ، أو بين حـ ، ا ، وهذا هو التعريف أو بالأحرى هذا هو الشرط اللازم والكافى للقضية « ب بين ا ، حـ » . ولكن هناك حالات أخرى من الترتيب لا تتحقق فيها الشروط السابقة لأول وهلة ، ولا تنطبق عليها فيما يظهر لفظة « بين » . وهذه الحالات فيها حدود أربعة ا ، ب ، حـ ، ء هى العنصر الترتيبى ، ويمكن أن نقول عنها إن ا ، حـ مفصولان بالحدين ب ، ء . وهذه العلاقة أعقد ولكن يمكن وصفها كالآتى : يقال إن ا ، حـ مفصولان عن ب ، ء عندما تقوم علاقة لا تماثلية بين ا ، ب ؛ ب ، حـ ؛ حـ ، ء ، أو بين ا ، ء ؛ ء ، حـ ؛ حـ ، ب ، أو بين حـ ، ء ؛ ء ، ا ؛ ا ، ب . وفيما يختص بالحالة الأولى يجب أن تقوم نفس العلاقة إما بين ء ، ا أو بين كل من ا ، حـ ؛ ا ، ء . ويقال مثل ذلك عن الحالتين الأخريين [١] (ولا نحتاج إلى فرض خاص عن العلاقة بين ا ، حـ أو بين ب ، ء . وفقدان هذا الشرط هو الذى يمنعنا من رد هذه الحالة إلى الحالة الأولى بطريقة بسيطة) . وهناك حالات : أهمها الحالات التى تكون فيها المتسلسلات مقفلة ، يظهر فيها أن رد الحالة الثانية إلى الأولى مستحيل صوريا ، ولو أن هذا المظهر خداع كما سنرى فى شطر منه . وسنوضح فى هذا الباب الطرق الرئيسية التى تنشأ بها المتسلسلات عن

---

(١) وهذا يتضمن شرطاً كافياً ولكنه غير ضرورى للفصل بين الأزواج .

مجموعات من مثل هذه العناصر الترتيبية .

ويبدو أن حدين فقط لا يمكن أن يكون لهما ترتيب فلا ينبغي أن نفترض أن الترتيب ممكن ، إلا عندما تقوم علاقات بين حدين . ففي جميع المتسلسلات سنجد أن هناك علاقات لا تماثلية بين حدين ، ولكن العلاقة اللاتماثلية التي لا توجد منها سوى حالة واحدة ، لا تكوّن ترتيباً ، إذ يلزمنا على الأقل حالتان لعلاقة « بين » وثلاث حالات على الأقل للفصل بين الزوجين . وعلى ذلك فمع أن الترتيب علاقة بين ثلاثة حدود أو أربعة ، فهو ممكن فقط عندما تكون هناك علاقات أخرى قائمة بين أزواج الحدود . وهذه العلاقات قد تكون من أنواع شتى وتؤدي إلى طرق مختلفة لتوليد المتسلسلات . وسأسرد الآن الطرق الرئيسية التي أعرفها .

١٨٩ – (١) أسهل طريقة لتكوين المتسلسلات هي الآتية : لتكن لدينا مجموعة من الحدود متناهية أو لامتناهية ، لكل حد فيها (مع احتمال استثناء حد واحد) له مع حد واحد لا غير من حدود المجموعة علاقة لاتماثلية معينة (ويجب بطبيعة الحال أن تكون غير متعدية) ، وأن كل حد (ومرة ثانية مع احتمال استثناء حد واحد يجب ألا يكون هو الحد الذي استثنيناه في المرة السابقة) له أيضاً مع حد واحد لا غير من حدود المجموعة علاقة هي عكس العلاقة الأولى[1] . ثم لنفرض أنه إذا كان للحد ا مع الحد ب العلاقة الأولى مع جـ ، فإن جـ لا يكون له العلاقة الأولى مع ا ، وعندئذ يكون لكل حد من حدود المجموعة فيما عدا الحدين المستثنيين علاقة واحدة مع حد ثان ، والعلاقة العكسية مع حد ثالث ، بينما هذان الحدان لا تقوم بينهما أي من العلاقتين المذكورتين . ويترتب على ذلك أنه بتعريف « بين » يكون حدنا الأول بين حدينا الثاني والثالث .

والحد الذي له مع حد معلوم إحدى العلاقتين المشار إليهما يسمى المابعد next after الحد المعلوم ، والذي له مع الحد المعلوم العلاقة العكسية يسمى الماقبل next before الحد المعلوم . وإذا قامت العلاقتان المشار إليهما بين حدين سميا متعاقبين . أما الحدان الاستثنائيان إن وُجدا فلا يقعان بين أي زوج من الحدود ،

---

(١) عكس العلاقة هي العلاقة التي يجب أن تقوم بين ص ، س عندما تقوم العلاقة المعلومة بين س ، ص .

ويسميان بطرفى المتسلسلة ، أو يسمى أحدهما الأول والثانى الآخر . ولا يستلزم وجود أحد هذين الحدين بالضرورة وجود الآخر . فمثلا الأعداد الطبيعية لها أول وليس لها آخر – وليس من الضرورى أن يوجد أيهما – مثال ذلك أن الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة مأخوذة معاً فليس لها أول ولا آخر [1] .

وقد نوضح الطريقة السابقة بوضعها فى قالب صورى : إذا رمزنا لإحدى علاقاتنا بالرمز ع ، ولعكسها بالرمز ع̆ [2] ، وإذا كان هـ أى حد من حدود مجموعتنا ، فإنه يوجد حدان د ، ف بحيث يكون هـ ع̆ د ، هـ ع ف ، أى بحيث يكون د ع هـ ، هـ ع ف . ولما كان لكل حد العلاقة ع̆ مع حد واحد فقط فلن نحصل على د ع ف . وقد سبق أن افترضنا منذ البداية أننا لن نحصل على ف ع د ، وعلى ذلك تقع هـ بين د ، ف [3] . وإذا كان ا حداً ليست له إلا العلاقة ع ، فمن الواضح أن ا ليست بين أى زوج من الحدود . ويمكن تعميم فكرة « بين » بتعريفنا أنه إذا كان حـ بين ب ، د ، وكان د بين حـ ، هـ ، قيل عندئذ إن حـ أو د يقع كذلك بين ب ، هـ . وبهذه الطريقة ما لم نصل إلى أحد طرفى المتسلسلة أو نرجع إلى الحد الذى بدأنا منه ، فستجد أى عدد من الحدود يقع الحد حـ بينها وبين ب . ولكن إذا كان المجموع الكلى للحدود لا يقل عن سبعة فلا نستطيع بهذه الطريقة أن نبين أن أى حد من ثلاثة لا بد أن يكون أحدها بين الاثنين الآخرين ، ما دامت المجموعة قد تتكون من متسلسلتين متميزتين إحداهما على الأقل – فى حالة المجموعة المتناهية – لا بد أن تكون مقفلة حتى نتحاشى وجود أكثر من طرفين .

ومن هذا يتضح أنه إذا أريد أن تؤدى الطريقة السابقة إلى متسلسلة واحدة ينتمى إليها أى حد من المجموعة ، فإننا نحتاج إلى شرط آخر يمكن التعبير عنه بقولنا : إن المجموعة يجب أن تكون « متصلة » . وسنضع طريقة فيما بعد لصياغة هذا الشرط دون إشارة إلى العدد . ولكن فى الوقت الحاضر سنكتفى بالقول بأن المجموعة تكون متصلة متى توافر الشرط الآتى : إذا أعطينا أى حدين من حدود المجموعة ، فهناك عدد متناه معين (وليس بالضرورة فريداً) من الخطوات من حد

---

(١) الطريقة المذكورة هى الطريقة الوحيدة لتكوين المتسلسلات حسب بولزانو Bolzano ('Paradoxien des Unendlichen' § 7).

(٢) هذه هى العلاقة التى نسميها بالمعكوس .

(٣) رفض د ع ف إنما يكون ضرورياً بالنسبة لهذه الطريقة الخاصة ، ولكن رفض ف ع د ضرورى لتعريف « بين » .

إلى التالى له تنتقل بها من أحد الحدين إلى الآخر . فإذا تحقق هذا الشرط أصبحنا واثقين أن أحد أي ثلاثة حدود في المجموعة يقع بين الحدين الآخرين .

فإذا افترضنا الآن أن المجموعة متصلة وتكوّن عندئذ متسلسلة واحدة، فقد ينشأ عن ذلك أربع حالات : (ا) قد يكون للمتسلسلة طرفان ، (ب) وقد يكون لها طرف واحد ، (حـ) وقد لا يكون لها طرف وتكون مفتوحة ، (د) وقد لا يكون لها طرف وتكون مُقْفلة . وفى الحالة (ا) ينبغي ملاحظة أن المتسلسلة لا بد أن تكون متناهية ، لأننا إذا أخذنا الطرفين ، وكانت المتسلسلة متصلة ، فهناك عددٌ معين متناه من الخطوات ن ينقلنا من أحد الطرفين إلى الآخر ، وبذلك يكون عدد حدود المجموعة هو ن + ١ . ويقع كل حد ما عدا الطرفين بينهما . ولا يقع أى طرف منهما بين أي زوج آخر من الحدود . أما في الحالة (ب) من جهة أخرى ، فلا بد أن تكون المجموعة لا متناهية ، وهذا صحيح حتى لو لم تكن المجموعة متصلة .

ولبيان ذلك نفترض أن للطرف ا وجود العلاقة ع ، ولكن ليس له العلاقة عَ ، عندئذ يكون لكل حد آخر من المجموعة كلا العلاقتين ، ولا يمكن أبدا أن يكون له العلاقتان معاً مع نفس الحد ، ما دامت ع لا تماثلية . وإذن فالحد الذى له مع الحد هو (مثلا) العلاقة ع ، ليس هو الحد الذى له معه العلاقة عَ ، بل هو إما حدٌ ما جديد، وإما أحد الحدود السابقة على الحد هو . ولا يمكن أن يكون هذا الحد هو الطرف ا ، لأن ا لا يمكن أن يكون له العلاقة عَ مع أي حد . وكذلك لا يمكن أن يكون حدا يمكن الوصول إليه بخطوات متتالية من ا دون المرور بالحد هو ، إذ لو كان الأمر كذلك لكان هذا الحد سابقا ، وهو خلاف الفرض بأن ع علاقة واحد بواحد . وعلى ذلك إذا كان اى حدٍ ما يمكن الوصول إليه من ا بخطوات متتالية ، فيجب أن يكون له تال ليس هو ا أو أي حد من الحدود بين ا ، اى . وعلى ذلك فالمجموعة لا نهائية ، متصلةً كانت أو غير متصلة . وكذلك في الحالة (حـ) يجب أن تكون المجموعة لا نهائية ، لأن المتسلسلة فرضاً مفتوحة ، أى أننا إذا بدأنا من هو ، فأي عدد من الخطوات نتخذه في أى اتجاه من الاتجاهين لا يعود بنا مرة ثانية إلى هو . ولا يمكن أن توجد نهاية محدودة لعدد الخطوات الممكنة ، وإلا كان للمتسلسلة طرف . ولا يلزم في هذه الحالة أيضا أن تكون المتسلسلة

متصلة . وعلى العكس من ذلك في الحالة (د) يجب أن نفترض الاتصال . والقول بأن المتسلسلة مقفلة معناه أننا إذا بدأنا عدداً ما ا ، واجتزنا عدداً من الخطوات ثم نرجع مرة أخرى إلى ا . وفي هذه الحالة ن هي عدد الحدود ؛ ويان عندنا أن نبدأ من أي حد . وفي هذه الحالة لا تكون « بين » معينة ؛ إلا حيث يوجد ثلاثة حدود متعاقبة ، وتشمل المتسلسلة على أكثر من ثلاثة حدود . وبغير ذلك نحتاج إلى علاقة أعقد هي الانفصال .

١٩٠ . (٢) رأينا كيف أن الطريقة السابقة تؤدي إما إلى متسلسلات مفتوحة أو مقفلة ، بشرط أن تكون حدودها متعاقبة . أما الطريقة الثانية التي سنناقشها الآن فإنها تعطي متسلسلات ليس فيها حدود متعاقبة ؛ ولكنها لا تعطي متسلسلات مقفلة[1] . وتستخدم في هذه الطريقة علاقة متعدية لا تماثلية ق ؛ ومجموعة من الحدود تقوم بين كل حدين منها ، إما العلاقة س ق ص ، أو ص ق س . وعندما تتحقق هذه الشروط تكون الحدود بالضرورة متسلسلة واحدة . ولما كانت العلاقة لا تماثلية فإنه يمكن التمييز بين س ق ص ، ص ق س ؛ ولا يمكن أن يجتمعا معاً[2] . ولما دامت ق متعدية . فإن س ق ص ، ص ق ط تؤديان إلى س ق ط ويتبع من هذا أن ق هي أيضاً لا متماثلة ومتعدية[3] . وهكذا فبالنسبة لأي حد س من المجموعة تقع جميع الحدود الأخرى من المجموعة في فصلين ، تلك التي لها العلاقة س ق ص ، وتلك التي لها العلاقة ص ق س . وإذا رمزنا لهذين الفصلين بالرمزين ~~ق~~ س ، ق س ، على الترتيب . رأينا أنه نظراً لتعدي ق إذا كانت ص تابعة

---

(١) الطريقة الآتية هي الطريقة الوحيدة التي يشرحها فيفانتي وقد ذكرت في كتاب Vivanti in the Formulaire de Mathématiques, 1895, VI, § 2, No 7, also by Gilman "On the properties of a one-dimensional manifold", Mind, N. S. Vol. I.

وسنجد أن هذه الطريقة عامة بمعنى لا نجده في أي طريقة من طرقنا .

(٢) إني أستخدم اصطلاح لا متماثل كمعادل لا كمناقض لمتماثل . فإذا كانت س ق ص وكانت العلاقة متماثلة كان عندنا دائماً ص ق س . وإذا كانت لا تماثلية فلن نحصل أبداً على ص ق س . وبعض العلاقات — كالتلازم المنطقي مثلاً — ليست متماثلة ولا لا متماثلة . وبدلاً من افتراض ق لا متماثلة ؛ فقد يمكن أن نضع فرضاً مكافئاً وهو الذي يسميه الأستاذ بيرس « علاقة غريبة » ؛ أي علاقة ليس لأي حد علاقة معها (وهذا الافتراض ليس مكافئاً للاتماثل على العموم بل فقط حين يرتبط بالتعدي) .

(٣) يمكن أن نقرأ التي تسمى د رق ق هي تعني ، بشرط عدم السماح بأي أفكار زمانية أو مكانية بالفعل .

للفصل رر ص، كانت رر ص داخلة في رر ص. وإذا كانت ط تابعة للفصل ر̆ ص، كانت ر̆ر ط داخلة في ر̆ ص. وإذا أخذنا حدين س، ص يحققان العلاقة س ق ص، فإن جميع الحدود الأخرى تقع في ثلاثة فصول (١) تلك التابعة للفصل رر ص، وبالتالي للفصل رر ص (٢) تلك التابعة للفصل ر̆ ص، وبالتالي للفصل رر ص (٣) تلك التابعة للفصل رر ص، ولكن ليس للفصل ر̆ ص. فإذا كانت ط من الفصل الأول حصلنا على ط ق س، ط ق ص. وإذا كانت ف من الفصل الثاني حصلنا على س ق ف، ص ق ف، وإذا كانت و من الفصل الثالث حصلنا على س ق و، و ق ص. وقد استبعدنا حالة ص ق ى، ى ق س، لأن س ق ص، ص ق ى تستلزم س ق ى، وهو ما لا يتفق مع ى ق س. وهكذا نحصل في الحالات الثلاث على (١) س بين ط، ص؛ (٢) ص بين س، ف؛ (٣) و بين س، ص. ويترتب على ذلك أن أي ثلاثة حدود في المجموعة فهي يجب يكون واحد منها بين الآخرين وتؤلف المجموعة كلها متسلسلة واحدة. فإذا لم يكن للفصل (٣) حدود قيل إن س، ص متعاقبان. ولكن هناك علاقات كثيرة ق يمكن وضعها وفقاً دائماً حدود في الفصل (٣). فإذا فرضنا مثلاً أن ق هي علاقة «قبل»، وكانت مجموعتنا هي مجموعة اللحظات في فترة معينة من الزمن أو في سائر الزمان، فهناك لحظة بين أي لحظتين في المجموعة. وكذلك الحال في المقادير التي بحثناها في الباب الأخير من الجزء الثالث متصلة. وليس في الطريقة الراهنة كما كان الحال في الطريقة السابقة ما يوجب أن تكون هناك حدود متعاقبة، ما لم يكن العدد الكلي للحدود في المجموعة متناهياً. ومن جهة أخرى لا تسمح هذه الطريقة بالمتسلسلات المقفلة. إذ أنه نظراً إلى تعدي العلاقة ق، فإن كانت المتسلسلة مقفلة، وكان س أي حد من حدودها، حصلنا على س ق س، وهذا محال لأن ق لا متماثلة. وبذلك لا يمكن أن تكون العلاقة المولدة في المتسلسلة المقفلة متعدية[1]. وكما كان الحال في الطريقة السابقة، ربما كان للمتسلسلة طرفان، وربما كان لها طرف واحد، وربما لم يكن لها أي طرف. وفي الحالة الأولى وحدها قد تكون متناهية، ولكن حتى في هذه الحالة قد تكون لا متناهية،

(١) انظر شرحاً أكثر دقة في الباب الثامن والعشرين.

أما في الحالتين الأخريين فيجب أن تكون كذلك .

١٩١ — (٣) وقد تتكون المتسلسلة بواسطة المسافات ، كما بينا ذلك جزئياً في الجزء الثالث . وسوف نشرح ذلك فيما يلي . وفي هذه الحالة إذا بدأنا من حد معين س فسنحصل على علاقات هي مقادير بين س وبين عدد من الحدود الأخرى ص ، ط . . . إلخ . وبحسب هذه العلاقات من حيث إنها أكبر أو أصغر يمكننا ترتيب الحدود المناظرة . فإذا لم تكن هناك علاقات شبيهة بذلك بين الحدود الباقية ص ، ط . . . ، فلن نحتاج إلى شيء آخر . ولكن إذا كان لها علاقات هي مقادير من نفس النوع ، احتجنا إلى بعض البديهيات حتى نضمن أن الترتيب قد يكون مستقلاً عن الحد الخاص الذي نبدأ منه . فإذا وضعنا س ط رمزا للمسافة بين س ، ط فإذا كان س ط أصغر من س و ، فلا بد أن تكون ص ط أصغر من ص و . ويتبع عن ذلك — وهي نتيجة لم يكن لها محل عندما كانت س هي الحد الوحيد الذي له مسافة — أن المسافات لا بد أن تكون علاقات لا متماثلة ، وما كان من المسافات له جهة واحدة فلا بد أن تعتبر أصغر من صفر . لأن قولنا ، س ط أصغر من و س ، يتضمن أن ، و ط أصغر من و و ، أي و ط أصغر من صفر . وبهذه الطريقة ترتد الحالة الرابعة عملياً إلى الثانية . لأن كل زوج من حدود س ، ص سيكون بحيث أن س ص أصغر من صفر ، أو ص س أكبر من صفر . ويمكن أن نقول في الحالة الأولى ص ق س ، وفي الثانية س ق ص . ولكننا نحتاج إلى بديهية أخرى لكي يمكن إجراء الترتيب دون إبهام . فإذا كان س ط = ص و وكان ط و = س ص ، فلا بد أن يكون و ، و نفس النقطة . وبهذه البديهية الإضافية يمكن إرجاع هذه الحالة إلى الحالة (٢) كاملا .

١٩٢ — (٤) وحالات العلاقات المثلثة triangular relations لها القوة على إنشاء الترتيب . ولنفرض العلاقة ع تقوم بين ص ، (س ، ط) وبين ط ، (ص ، ى) وبين ى ، (ط ، و) وهكذا . أما ، بين ، فهي نفسها هذه العلاقة ، وحينئذ ربما كانت هذه هي الطريقة الأعظم مباشرة وطبعا لتكوين الترتيب . فنقول في هذه الحالة إن ص بين س ، ط عندما تقوم العلاقة ع بين ص والزوج س ، ط . ولا بد لنا من فروض بالنسبة للعلاقة ع تثبت أنه إذا كانت ص بين س ،

ط ، وكانت ط بين ص ، و ، عندئذ ص ، ط يقوم كل منهما بين ط ، و . أى أنه إذا كانت ص ع (ص ، ط) ، ط ع (ص ، و) ، فلا بد أن تكون ص ع (ص ، و) ، ط ع (ص ، و) . وهذا نوع من التعدى الثلاثى الحدود . كذلك إذا كانت ص بين ص ، و وكانت ط بين ص ، و ، إذن ط لا بد أن تكون بين ص ، و ، وأن تكون ص بين ص ، ط أى أنه إذا كانت ص ع (ص ، و) وكانت ط ع (ص ، و) إذن ط ع (ص ، و) ، ص ع (ص ، ط) . كذلك يجب أن تكون ص ع (ص ، ط) مكافئة ل ص ع (ط ، ص)[1] . وبهذه الفروض يتكون ترتيب لا إبهام فيه بين أى عدد من الحدود بحيث تقوم لأى ثلاثة منها العلاقة ع . أما أن هذه المسائل تقبل أو لا تقبل مزيدا من التحليل فأمر أرجئ بحثه للباب التالى .

١٩٣ — (٥) لم نجد حتى الآن طريقة لتكوين المتسلسلات المتصلة المقفلة ، ومع ذلك فهناك أمثلة هذه المتسلسلات كالزوايا ، والخط المستقيم الناقص ، والأعداد المركبة التى لها مقياس معلوم . ولذلك لزم أن توضع نظرية تسمح بإمكان وجود هذه المتسلسلات . وفى الحالات التى تكون الحدود فيها علاقات لا متماثلة كالمستقيمات ، أو عندما تكون هذه الحدود مرتبطة ارتباطاً وحيدا وعكسياً بمثل هذه العلاقات ، فالنظرية الآتية تفى بالغرض المطلوب . أما فى الحالات الأخرى فيمكن استخدام الطريقة السادسة التى سيأتى ذكرها بعد .

ليكن ص ، ص ، ط ... مجموعة من العلاقات اللاتماثلية ولتكن ع علاقة لا متماثلة تقوم بين كل اثنين من ص ، ص ، أو ص ، ط ، إلا فى الحالة التى تكون فيها ص هى العلاقة العكسية ل ص . ولنفرض كذلك أن العلاقة ع هى بحيث إذا قامت بين ص ، ص فإنها تقوم بين ص وعكس ص . وإذا كانت ص أى حد من حدود المجموعة ، فلنفرض أن جميع الحدود التى لها مع ص العلاقة ع أو ع هى حدود المجموعة . وجميع هذه الشروط متحققة فى الزوايا . وحينما تتحقق كانت المتسلسلة الناتجة عن ذلك مقفلة . لأن ص ع ص تستلزم ص ع ص ، ومن ثم ص ع ص ، وإذن ص ع ص ، أى أنه بواسطة العلاقة ع يمكن أن نسير من ص ونعود

---

(١) انظر Peano, I Principii di Geometria. Torino 1889. Assioms VIII, IX, X, XI.

إلى حـ مرة أخرى . وأيضا ليس فى التعريف ما يمنع من أن تكون المتسلسلة متصلة بهـ ولكن لما كانت المتسلسلة مقفلة ، فلا يمكن تطبيق فكرة « بين » تطبيقا كليًّا ، ولكن فكرة الانفصال يمكن تطبيقها دائما . والسبب فى وجوب افتراض أن الحدود إما أنها علاقات لا متماثلة أو مترابطة مع مثل هذه العلاقات . أن هذه المتسلسلات لها عادة أقطاب متقابلة antipodes ، أو « متقابلات » كما قد تسمى فى بعض الأحيان ، وأن فكرة « المقابل » opposite يظهر أنها مرتبطة جوهريًّا بعكس العلاقة اللاتماثلية .

١٩٤ — (٦) وبنفس الطريقة التى شرحناها فى (٤) لتكوين متسلسلة من علاقات « بين » ، نستطيع أن نكوّن المتسلسلات مباشرة من علاقات الانفصال الرباعية الحدود . وفى هذه الحالة أيضا تلزمنا بعض البديهيات . وقد بين ڤايلاتى[1] Vailati أن البديهيات الخمس الآتية كافية . كما بين بادوا Padua أن لها استقلالا ترتيبيًّا ، أى لا يمكن استنتاج أى واحدة منها من سابقاتها[2] . ولنرمز لقولنا « ا ، ب ينفصلان حـ عن د » بالرمز ا ب || حـ د ، فنحصل على :

(١) ا ب || حـ د تكافئ حـ د || ا ب

(٢) ا ب || حـ د تكافئ ا ب || د حـ

(٣) ا ب || حـ د تستبعد ا حـ || ب د

(٤) لأى أربعة حدود من مجموعتنا يجب أن يكون ا ب || حـ د أو ا حـ || ب د أو ا د || ب حـ .

(٥) إذا كانت ا ب || حـ د ، ا حـ || ب هـ إذن ا حـ || د هـ .

وبواسطة هذه الفروض الخمسة تكتسب الحدود ا ، ب ، حـ ، د ، هـ . . . ترتيبا لا إبهام فيه نبدأ فيه من علاقة بين زوجين من الحدود ، وهو ترتيب غير معين إلا بالقدر الذى تعينه الفروض المذكورة . وسأرجع إلى مرحلة متأخرة لمزيد من بحث هذه الحالة عندما نبحث فى علاقة الانفصال .

الطرق الست المذكورة لتكوين المتسلسلات هى الطرق الرئيسية التى أعرفها ، وجميع الطرق الأخرى يمكن ردها فيما أعلم إلى هذه الطرق الست . والطريقة الأخيرة

---

(١) Rivista di Matematica, V, pp. 76, 81.

(٢) المرجع السابق ص ١٨٥ .

وحدها هي التي تؤدي إلى تكوين سلسلة متصلة مقفلة ليست حدودها علاقات لا متماثلة ولا مرتبطة بمثل هذه العلاقات[١] . هذا يجب أن تطبق هذه الطريقة الأخيرة على الهندسة الإسقاطية والهندسة الناقصية ، حيث يظهر أن ترابط النقط على مستقيم مع المستقيمات الخارجة من نقطة ـ تابع منطقياً لترتيب النقط على المستقيم .
ولكن قبل أن نقرر إذا كانت هذه الطرق الست (وخاصة الرابعة والسادسة) مستقلة ولا يمكن ردّها ، فلا بد أن نبحث في معنى الترتيب (وهو ما لم نقم به حتى الآن) ، كما يجب أن نبحث في المكونات المنطقية (إن وجدت) ، التي يتركب منها هذا المعنى . وهذا ما سنعمله في الباب القادم .

---

(١) انظر الباب الثاني وتفسيره .

الباب الخامس والعشرون

معنى الترتيب

١٩٥ — تبينت لنا الآن الظروف التي يوجد فيها ترتيب بين مجموعة من الحدود ، فحصلنا بهذه الطريقة على معرفة استقرائية معينة عن طبيعة الترتيب ، ولكننا لم نواجه حتى الآن هذا السؤال وهو : ما الترتيب ؟ وهو سؤال صعب لم يُكتب فيه شيء ، على الإطلاق فيما أعلم . وجميع المؤلفين الذين اطلعت على كتبهم يكتفون بعرض الكيفية التي يتكون بها الترتيب . ولما كان معظمهم إنما يعرض فقط طريقةً واحدة من الطرق الست التي بيناها في الباب الرابع والعشرين ، فمن اليسير عليهم الخلط بين تكوين الترتيب وطبيعته . وقد تبين لنا هذا الخلط من تعدد الطرق السابقة ، إذ من الواضح أننا نعني بالترتيب شيئاً معينا تماماً . ويجب أن يكون من حيث إنه يتكون على حد سواء في جميع الطرق الست متميزاً عن كل طريقة من الطرق التي بها يتكون ومتميزا عنها كلها ، اللهم إلا إذا كانت إحدى هذه الطرق هي الرئيسية وأن الأخرى تُرد إليها . والهدف من هذا الباب توضيح هذا العنصر المشترك في جميع المتسلسلات مع عرض الحجج المنطقية المتصلة به . وهذه المناقشة ذات أهمية فلسفية خالصة ، ويمكن إغفالها تماماً عند بحث الموضوع بحثا رياضياً .

ولكي نتدرج في الخوض في هذا الموضوع ، فلنفرز مناقشة فكرة « بين » عن فكرة الفصل بين الأزواج ، حتى إذا اتفقنا على طبيعة كل فكرة منهما على انفراد شرعنا بعد ذلك في الجمع بينهما ، والنظر في ذلك الأمر المشترك بينهما . ولنبدأ الحديث عن « بين » لأنها أسهل الفكرتين .

١٩٦ — « بين » تتميز (كما رأينا في الباب الرابع والعشرين) بأنها علاقة حد واحد ص مع حدين آخرين س ، ط تقوم كلما كان للحد س مع ص ، وللحد ص مع ط ، علاقةٌ ما ليست للحد ص مع س ، ولا للحد ط مع ص ، ولا للحد ط مع س[1] .

---

(١) الشرط الثاني بأن ط ليس له مع س العلاقة المذكورة شرط غير جوهري نسبيا ، من جهة أننا

وهذه الشروط لا شك أنها « كافية » للبينية . أما أنها « ضرورية » فموضع نظر . ولا بد لنا من التمييز بين عدة آراء محتملة في هذا الصدد . (١) فقد نذهب إلى أن الشروط المذكورة تعطي معنى « بين » بالذات ، وأنها تكوّن التحليل الفعلي له لا أنها مجرد مجموعة شروط تحقق وجوده . (٢) وقد نذهب إلى أن « بين » ليست علاقة الحدود س ، ص ، ط أصلاً ، بل هي علاقة العلاقة من ص إلى س ، ومن ص إلى ط ؛ أي علاقة اختلاف الجهة . (٣) وقد نذهب إلى أن « بين » فكرة لا يمكن تعريفها مثل « أكبر » و « أصغر » ، وأن الشروط السابقة تبيح لنا استنتاج أن ص بين س ، ط . ولكن يمكن أن تكون هناك ظروف أخرى تحصل فيها البينية ، بل قد تحصل دون أن تتطلب وجود أي علاقة سوى التعدد بين الأزواج (س ، ص) ، (ص ، ط) ، (س ، ط) . ولكي نفصل في أمر هذه النظريات يحسن بنا أن نبحث كلاً منها على حدة .

١٩٧ — (١) في هذه النظرية نعرف قولنا « ص بين س ، ط » بأنه يعني : « هناك علاقة ع بحيث تكون س ع ص ، ص ع ط ولكن ليس ص ع س ، ط ع ص » . أما هل نضيف إلى ذلك « ليس ط ع س » فموضع نظر . وسنفترض بادئ الأمر أن هذه الإضافة لم تحدث . وينشأ عن ذلك أن القضايا الآتية نسلم عموماً بأنها واضحة بذاتها :

(ا) إذا كان ص بين س ، ط ، وكان ط بين ص ، و ، إذن ص بين س ، و .

(ب) إذا كان ص بين س ، ط ، وكان و بين س ، ص ، إذن ص بين و ، ط . ومن باب الاختصار دعنا نتفق على أن نرمز لعبارة « ص بين س ، ط » بالرمز س ص ط . وبذلك يمكن كتابة القضيتين السابقتين هكذا :

(ا) س ص ط ، ص ط و تستلزمان س ص و ؛ (ب) س ص ط ، س و ص تستلزمان و ص ط .

إنما نحتاج إليه في حالة ما إذا كان ص بين س ، ط فرضاً ، يمكن ... ص ... أو ... ص ، س ... فإذا تمنا أن نبين بأنه يكون كل حد منها من الحدين الآخرين ... في ... الملك ... فيمكن حذف الشرط المذكور بتاتاً . ... الشروط الأربعة الأخرى ... على العكس ... أكثر جوهرية .

ويجب أن نضيف أن العلاقة « بين » متماثلة فيما يختص بالطرفين ، أي أنّ م س ص ط تستلزم ط ص س م . وهذا الشرط ينتج مباشرة من تعريفنا . ومما تجدر ملاحظته بالنسبة للبديهيتين (١)، (ب) أن « بين » من الوجهة الراجحة للنظر تكون دائماً مضافة لعلاقة ما ع . وأننا إنما نفترض صحة البديهيتين عندما تكون العلاقة بعينها هي القائمة في كلا المقدمتين . ولننظر الآن في هاتين البديهيتين أهما نتيجتان لتعريفنا أو لا . وسنصطلح على كتابة عَ بدلاً من لا – ع .

م س ص ط تعني س ع ص ، ص عَ ط ، س عَ م ، ط عَ س
س ص ط و تعني س عَ ص ، ط ع و ، ط عَ س ، و ع ط .

وهكذا نجد أن س ص ط و إنما تضيف إلى م س ص ط الشرطين وهما ط ع و ، و ع ط . فإذا كانت ع متعدية حقق الشرطان س ص و . وإذا لم تكن ع كذلك فلا . وقد رأينا كيف يمكن أن تتولد بعض المتسلسلات من علاقات واحد بواحد ع ليست متعدية . ومع ذلك ففي مثل هذه الحالات إذا رمزنا بالرمز ع للعلاقة بين م ، ط التي تلزم عن م ع ص ، ص ع ط ؛ وهكذا للقوى الأعلى ، أمكننا أن نستبدل بالعلاقة ع علاقة متعدية عَ ، حيث تدل ا عَ على قوة ما موجبة للعلاقة ع ؛ وبهذه الطريقة إذا صحت م س ص ط على علاقة هي قوة ما معينة للعلاقة ع ، إذن م س ص ط تصح للعلاقة عَ بشرط ألا تكون أي قوة موجبة للعلاقة ع مكافئة للعلاقة عَ . إذ في هذه الحالة الأخيرة لا بد أن نحصل على س ع ص كلما كان عندنا س عَ ص . ولا يمكن وضع عَ بدلاً من ع في تفسير م س ص ط . ولكن هذا الشرط وهو أن عكس ع لا يجب أن يكون قوة موجبة ل ع . يكافئ الشرط القائل بأن متسلسلتنا لا يجب أن تكون مقفلة . لأنه إذا كانت عَ = عن ، إذن ع عَ = عن+١ . ولكن ما دامت ع علاقة واحد بواحد ، فإن ع عَ يستلزم علاقة التطابق . وبذلك فإن ن + ١ من الخطوات تعود بنا من س إلى س مرة ثانية . وتكون متسلسلتنا مقفلة . وعدد حدودها هو ن + ١ . ولقد سبق أن اتفقنا على أن « بين » لا تنطبق تماماً على المتسلسلات المقفلة ، ومن هنا كان هذا الشرط . وهو ألا تكون عَ قوة للعلاقة ع ، لا يفرض على البديهية (١) من القيود سوى ما نتوقع أن تكون خاضعة لها .

أما بالنسبة للبديهية (ب) فيحصل عندنا :

س ص ط = س ع ص . ص ع ط . ص ع س . ط ع ص

س و ص = س ع و . و ع ص . و ع س . ص ع و .

والحالة التي تشير إليها هذه البديهية إنما تكون ممكنة إذا لم تكن ع علاقة واحد بواحد ، ما دمنا نحصل على س ع ص ، س ع و . واستنتاج و من ط هو ههنا نتيجة مباشرة للتعريف دون الحاجة إلى أي شروط إضافية .

بقي أن نبحث هل يمكن الاستغناء عن شرط ط ع س في تعريف « بين » . فإذا فرضنا أن ع علاقة واحد بواحد ، وأن ط ع س متحققة ، حصلنا على س ص ط = س ع ص . ص ع ط . ط ع ص . س غ ص وعندنا كذلك و ع س فرضا ، فما دامت ع علاقة واحد بواحد ، وما دامت س ع ص : فإن س ع ط . ومن ههنا نحصل بمقتضى التعريف على س ط ص ، وبالتالي نحصل على ط س ص . فإذا تمسكنا بالبديهية (ا) حصلنا على س ط ص ، وهو محال . إذ لا شك أن جزءاً من معنى « بين » هو أن الحدود الثلاثة في العلاقة لا بد أن تكون مختلفة ، ومن المحال وجود حد بين س ، ص . وبذلك إما أن ندخل الشرط وهو ط ع س ، وإما أن نضع الشرط الجديد في التعريف وهو أن س ، ط ، لا بد أن يكونا مختلفين . (وينبغي ملاحظة أن تعريفنا يستلزم أن س مختلف عن ص ، وأن ص مختلف عن ط . وإذا لم يكن الأمر كذلك لكانت س ع ص تستدعي ص ع س ، وكذلك ص ع ط تستدعي ط ع ص) . وقد يبدو من الأفضل إدخال الشرط القائل بأن س ، ط مختلفان ، لأن هذا على أي حال ضروري ، وليس لازماً عن ط غ س . يجب إذن إضافة هذا الشرط إلى البديهية (ا) ، وهو أن س ص ط ، ص ط و تستلزمان س ص و إلا إذا كان س ، و متطابقين . وليست هذه الإضافة ضرورية في البديهية (ب) ، ما دامت متضمنة في المقدمات . وإذن ليس شرط ط غ س ضرورياً إذا شئنا أن نسلم بأن س ص ط تتفق مع ص ط و — ومثال زوايا المثلث تجعل هذا التسليم ممكناً . وقد نضع بدلا من ط ع س الشرط الذي سبق أن وجدنا أنه لازم للصحة العامة للبديهية (ا) وهو ألا تكون أي قوة للعلاقة ع مكافئة لعكس ع ، لأنه لو صحت س ص ط ،

س، ط، س معاً فسنحصل (على الأقل بالنسبة إلى س، ص، ط) على ع٢ = ع؛ أي إذا كانت س ع ص، ص ع ط إذن ط ع س. ويبدو أن هذا السبيل الأخير هو الأفضل. وإذن في جميع الحالات التي أول ما تعرف فيها «بين» بعلاقة واحد بواحد ع، نستبدل بها علاقة ع٢ التي تدل على «قوة موجبة ما لعلاقة ع». عندئذ تكون علاقة ع٢ متعدية. ويكون الشرط القائل بأنه لا قوة موجبة لعلاقة ع مكافئة لعكسها أي ع˘ مكافئاً للشرط بأن ع٢ لا مماثلة. وأخيراً يمكن تبسيط الموضوع كله فيما يلي:

القول بأن ص بين س، ط يكافئ القول بوجود علاقة ما متعدية لا مماثلة تعلق كلا من س، ص وتعلق ص، ط.

وهذه العبارة البسيطة الموجزة كما يتبين من المناقشة الطويلة السابقة ليست أكثر ولا أقل من تعريفنا الأصلي، مع التعديلات التي وجدنا تدريجياً أنها لازمة. ومع ذلك يبقى هذا السؤال: هل هذا هو معنى «بين»؟

١٩٨ – لو أجزنا هذه العبارة «ع علاقة "بين" س، ص» لترتب عليها فوراً حالة نفي. فالعبارة كما يلاحظ القارئ قد استبعدت بصعوبة من تعريفات «بين»؛ لأن إدخالها في التعريف يجعله على الأقل لفظياً يدور في حلقة مفرغة. وربما لا يكون هذه العبارة سوى قضية لغوية أو عسى أنها تشير إلى نقص حقيقي في التعريف المذكور. ولنشرع في فحص علاقة العلاقة ع مع حديها س، ص. أي كل شيء؛ لا نزاع في وجود مثل هذه العلاقة. فإن يكون هناك حد له العلاقة ع مع حد آخر س، فلا شك أن له علاقة مع ع. وهي علاقة يمكن التعبير عنها بأنها «تنتمي لميدان ع». فإذا قلنا س ع ص، كانت س منتمية لميدان ع، ص لميدان ع˘. فإذا رمزنا هذه العلاقة بين س، ع، أو بين ص، ع بالرمز E، حصلنا على س E ع، ص E ع˘. وإذا رمزنا بعد ذلك لعلاقة ع بالعلاقة ع˘ بالرمز I، حصلنا على ع˘ I ع، و ع I ع˘ وإذن نحصل على س E ع، ص IE ع. ولكن لما كانت E ليست بأي حال عكس E، فلا ينطبق تعريف «بين» المذكور، إذا عولنا على هذا السبب فقط. ولا كذلك E أو I E متعدية. وإذن فتعريفنا لعلاقة «بين» لا ينطبق بالمرة في مثل هذه الحالة. وربما يساورنا

الشك في أمر « بين » أنها في هذه الحالة أصلا نفس المعنى الذي لها في الأحوال الأخرى . ولا ريب أننا لا نحصل بهذه الطريقة على متسلسلات : لأن س ، ص لا يقعان في نفس الجهة مثل ع بين ع والحدود الأخرى . وعلاوة على ذلك لو سلمنا بعلاقات حد مع نفسه : لسلمنا بأن مثل هذه العلاقات هي « بين » حد ونفسه ، وهو ما اتفقنا على استحالته . ومن ثمّ قد نميل إلى اعتبار استخدام « بين » في هذه الحالة عرضاً لغوياً يرجع إلى أن العلاقة تذكر عادة بين الموضوع والمحمول ، كما تقول « ا هو والد ب » . ومن جهة أخرى قد يقال إن العلاقة هنا بالفعل علاقة خاصة مع الحدين اللذين تقوم بينهما ، وأن « بين » لا بد أن تدل على علاقة حد واحد مع حدين آخرين . ونقول في الرد على الاعتراض بأن علاقات حد مع نفسه أن مثل هذه العلاقات تكوّن في أي نظام صعوبة منطقية خطيرة ، وأنه يحسن إن أمكن إنكارُ صحتها الفلسفية . وأنه حتى حيث تكون العلاقة القائمة هي التطابق ، فلا بد من وجود حدين متطابقين : فهما إذن غير متطابقين تماماً . ولما كانت هذه المسألة تثير صعوبةً جوهرية لا نستطيع مناقشتها هاهنا ، فقد يحسن أن نمر بالجواب مر الكرام[1] . وربما يقال بعد ذلك إن استخدام نفس اللفظ في مقامين مختلفين يدل دائماً على وجه ما من الشبه يجب أن يحدد مداه كل من ينكر أن المعنى في الحالين واحد ، وأن وجه الشبه هاهنا لا ريب أنه أعمق من مجرد ترتيب ألفاظ في جملة ، وهو على كل حال شبه أكثر تعبيراً في هذا الصدد من العبارة القائلة بأن العلاقة هي بين حديها . وردنا على هذه الملاحظات أن المعترض نفسه قد بين وجه الشبه تماماً من أن علاقة العلاقة بحديها هي علاقة حد واحد بحدين آخرين ، كما الحال في علاقة « بين » . وهذا هو الذي يجعل الحالين متشابهتين . وهذا الرد الأخير صحيح في نظري ، ويمكن أن نسمح بأن علاقة العلاقة بحديها مع أنها تنطوي على مشكلة منطقية هامة ، إلا أنها ليست نفس علاقة « بين » التي عليها يقوم الترتيب .

ومع ذلك فتعريف « بين » المذكور على الرغم من أننا سنضطر في آخر الأمر إلى قبوله ، يكاد يبدو لأول وهلة ناقصاً من وجهة نظر فلسفية ، لأن الإشارة إلى علاقة لا متماثلة « مثل » إشارة مبهمة ، يظهر أنها تحتاج إلى استبدالها بعبارة أخرى

---

(١) انظر الفقرة ٥٥

لا تظهر فيها هذه العلاقة غير المعينة ، وإنما تظهر فيها الحدود والبينية فقط . وهذا يفضي بنا إلى البحث في الرأي الثاني عن « بين » .

١٩٩ ــ (٢) قد يقال إن « بين » ليست علاقة ثلاثة حدود بالمرة بل علاقة حدين هما اختلاف الجهة . فإذا اصطنعنا هذه الوجهة من النظر ، فأول ما يجب ملاحظته . أننا تفتقر إلى العلاقتين المتقابلتين ، لا بصفة عامة فقط ، بل بالتخصيص من حيث اتجاهما إلى حد واحد بالذات . وهذا التمييز مألوف لدينا من قبل عندما بحثنا حالة المقادير والكميات . ثم إن « قبل » و « بعد » مأخوذين مجردين لا يكونان « بين » ، وإنما ينشأ « بين » حين يكون حد واحد بعينه هو قبل وبعد في آن واحد ، وعندئذ يكون هذا الحد بين ما هو قبله وما هو بعده . ومن ثم كانت هناك صعوبة في رد « بين » إلى اختلاف الجهة . والعلاقة المتخصصة شيء غير منطقي ، وقد رأينا في الجزء الأول (بند ٥٥) أنه من الضروري إنكارها ، وليس من السهل تماماً التمييز بين علاقة ذات صلة بعلاقتين ومتخصصة بانتمائها لنفس الحد ، وبين علاقة الحد المذكور مع حدين آخرين . وفي الوقت نفسه هناك مزايا عقلية يحققها رد « بين » إلى اختلاف الجهة ، إذ نتخلص من ضرورة الالتجاء إلى علاقة مثلثة ربما يعترض عليها كثير من الفلاسفة ، ونعين عنصراً مشتركاً في جميع الحالات التي تقوم فيها « بين » . وهي اختلاف الجهة ، أي الاختلاف بين علاقة لا متماثلة وعكسها .

٢٠٠ ــ والسؤال عن العلاقة المثلثة أيمكن أن توجد على الإطلاق ، سؤال حله بالفعل صعب وغير مهم في آن واحد . ولكن صياغته بدقة في غاية الأهمية . ويلوح أن الفلاسفة يذهبون عادة ــ ولو أن ذلك ليس بصراحة فيما أعلم ــ إلى أن العلاقات ليس لها أبداً أكثر من حدين ، بل إن مثل هذه العلاقات يردونها بالقوة أو بالحيلة إلى المحمولات . أما الرياضيون فيكادون يجمعون على الكلام عن علاقات متعددة الحدود . ومع ذلك فلا يمكن أن نحل المسألة بمجرد الرجوع لأمثلة رياضية ، لأننا نرجع بالسؤال على هذه الأمثلة أتقبل التحليل أو لا تقبله . ولنفرض مثلاً أننا عرفنا مستوى الإسقاط بأنه علاقة بين ثلاث نقط ، فأكبر الظن أن الفيلسوف سيقول دائماً كان ينبغي تعريف هذا المستوى كعلاقة بين نقطة وخط ، أو كعلاقة

بين خطين متقاطعين — وهو تغيير لا يحدث إلا فرقاً قليلا من الناحية الرياضية أو لا يحدث فرقا بالمرة . ولننظر الآن في معنى السؤال بالضبط ، فنقول : من بين الحدود يوجد نوعان يختلفان اختلافا جوهريًا ، وعلى أساس هذا الاختلاف تقوم حقيقة مذهب الذات والصفات . فهناك حدود لا يمكن أن تقع إلا حدوداً ، مثل : النقط ، اللحظات ، الألوان ، الأصوات ، أجزاء المادة ، وبوجه عام الحدود من النوع الذى تتكون منه الموجودات . ومن ناحية أخرى هناك حدود يمكن أن تقع على نحو آخر غير الحدود ، مثل : الوجود ، الصفات عموماً ، والعلاقات . وقد اتفقنا على تسمية هذه الحدود تصورات Concepts [١] . وورود التصورات لا على أنها حدود هو ما يميز القضايا عن مجرد التصورات . وفى كل قضية يوجد على الأقل تصور واحد أكثر مما فيها من حدود . أما النظرية التقليدية — التى يمكن تسميتها نظرية الموضوع والمحمول — فإنها تذهب إلى أن كل قضية فيها حد واحد هو الموضوع ، وتصور واحد ليس حداً هو المحمول . ويجب اطراح هذه الوجهة من النظر لأسباب كثيرة[٢] .

وأيسر اختلاف عن الرأى التقليدى يقع فى تسليمنا بأنه حيث لا تقبل القضايا أن ترد إلى صورة الموضوع والمحمول فهناك دائما حدان فقط ، وتصور واحد ليس حداً . (قد يكون الحدان بالطبع مركبين . وقد يشتمل كل منهما على تصورات ليست حدوداً) . ومن هنا تنشأ الفكرة القائلة بأن العلاقات تقوم دائماً بين حدين فقط ، إذ يمكن تعريف العلاقة بأنها تصور يقع فى قضية تشتمل على أكثر من حد واحد . ولكننا لا نجد سببا ، أوليًا ، لقصر العلاقات على حدين . وهناك حالات تؤدى إلى ما يخالف ذلك . فأولا حين نحكم بتصور عدد على مجموعة ، وكانت المجموعة مركبة من ن من الحدود ، فهناك ن من الحدود ، وتصور واحد فقط (وهو ن) ليس حدا . وثانيا أن العلاقات التى هى من قبيل الوجود الذى يبعد عن زمان ومكان وجوده إنما يمكن أن ترد بطريقة مشوهة إلى علاقات مع حدين[٣] . فإذا ذهبنا إلى أن هذا الرد أساسى ، فيبدو أنه دائما يمكن صوريًا

---

(١) انظر الجزء الأول الباب الرابع .

(٢) انظر المؤلف . The Philosophy of Leibniz, Cambridge 1900, Chap. II, § 10

(٣) انظر الجزء السابع الباب الرابع والخمسين .

بتأليف جزء من القضية فى حد واحد مركب ، ثم تقرير علاقة بين هذا الجزء وبين باقى القضية الذى يمكن كذلك أن يرد إلى حد واحد . وقد تكون هناك حالات لا يمكن فيها إجراء ذلك ، ولكنى لم أصادف مثل هذه الحالات . أما أن مثل هذا الرد الصورى مما يجب إجراؤه دائماً ، فمسألة فيما أعلم ليست بذات أهمية عملية أو نظرية كبيرة .

٢٠١ — من كل ذلك نرى أنه ليس ثمة سبب ، أولى ، صحيح يرجح تحليل « بين » إلى علاقة تربط بين علاقتين . إلا إذا رأينا أن العلاقة المثلثة أفضل . وهذا السبب الآخر فى ترجيح كلمة تحليل « بين » هو الأهم . إذ ما دامت « بين » علاقة مثلثة بين الحدود ، فلا بد أن تؤخذ إما على أنها لا تُعرَّف ، وإما على أنها ذات صلة بعلاقة ما متعدية لا متماثلة . غير أننا إذا جعلنا « بين » تقوم أساساً على تقابل علاقتين يتصلان بحد وحده ، فعسى أن يزول أى أثر للإبهام . قد يقال فى الاعتراض على هذه الوجهة من النظر إنه لا سبب يظهر الآن لِمَ وجب أن تكون العلاقات المذكورة متعدية ، وأن نفس معنى « بين » — وهذا هو الأهم — يتضمن الحدود ، لأن الترتيب حاصل لها هى لا لعلاقاتها . ولو أن العلاقات كانت هى وحدها التى لها مدخل فى الأمر ، فلم يكن من الضرورى كما هو الواقع أن نخصها بذكر الحدود التى تقوم بينها . جملة القول ينبغى أن نتخلى عن الرأى القائل بأن « بين » ليست علاقة مثلثة .

٢٠٢ — (٣) . ونتناول الآن بالبحث النظرية القائلة بأن « بين » علاقة أولية لا تقبل التعريف . ومما يعزز هذه الوجهة من النظر أننا فى جميع طرقنا لتوليد المتسلسلات المقترحة نستطيع أن نتبين نشوء حالات من البينية ، ونستطيع اختبار التعاريف المقترحة . وربما ظهر من هذا أن التعاريف المقترحة كانت مجرد شروط تتضمن علاقات « بين » ولم تكن تعاريف صحيحة لهذه العلاقة . وسؤالنا : هل مثل هذه الشروط أو تلك تتضمن لنا وقوع ص بين س ، ط ؟ سؤال نستطيع دائماً الإجابة عنه بغير رجوع (على الأقل عن شعور) إلى أى تعريف سابق . ومما يؤيد أن طبيعة « بين » لا تقبل التحليل هو أن العلاقة متماثلة بالنسبة للطرفين ؛ ولم تكن

انطباق كذلك بالنسبة لعلاقات الأزواج التي استنتجنا منها « بين » . بيد أن هناك عقبة كأداء في سبيل هذه الوجهة من النظر : ذلك أن لمجموعات الحدود تراتيب كثيرة مختلفة قد نجد في ترتيب منها أن ص بين س ، ط . وفي ترتيب آخر س بين ص ، ط [1] وهذا يبين فيما يظهر أن « بين » أساساً تتطلب صلة بالعلاقات التي استنتجت منها ؛ وإلا فعلينا على الأقل أن نسلم بأن هذه العلاقات داخلة في تكوين المتسلسلات لأن المتسلسلات تتطلب حتماً أن تكون هناك على الأكثر علاقة واحدة للبينية بين ثلاثة حدود . ومن أجل ذلك لا بد لنا في الظاهر أن نقبل أن « بين » ليست المصدر الوحيد للمتسلسلات ، بل يجب أن نلحقها بذكر علاقة ما متعدية لا متماثلة عنها تنشأ البينية . وكل ما يمكن قوله هو أن هذه العلاقة المتعدية اللامتماثلة بين حدين ربما تكون نفسها تابعة منطقياً لعلاقة ما ثلاثية الحدود ومشتقة منها ، كتلك التي بحثناها في الباب الرابع والعشرين عند ذكر الطريقة الرابعة في تكوين المتسلسلات . فعندما نحقق مثل هذه العلاقات البديهيات المذكورة سابقا ، فإنها تؤدي بذاتها إلى علاقات تقوم بين أزواج الحدود . لأننا قد نعرف إن ب تسبق جـ حين تستلزم أ جـ د ، ب جـ د ؛ وأن ب تتبع جـ حين تستلزم أ ب د ، جـ ب د ، حيث أ ، د حدان ثابتان . ومع أن مثل هذه العلاقات إنما هي مشتقة فقط ، إلا أنه بفضلها تقع « بين » في مثل هذه الأحوال . ويبدو أننا مضطرون آخر الأمر لإغفال الإشارة إلى العلاقة اللامتماثلة في تعريفنا . فنقول :

يقع الحد ص بين الحدين س ، ط بالنسبة إلى علاقة متعدية لا متماثلة ع حين تكون س ع ص ، ص ع ط . ولا يمكن القول إن س تقع حتماً في أي حالة أخرى بين س ، ط . وهذا التعريف لا يعطينا مجرد معيار بل يعطينا معنى البينية ذاتها .

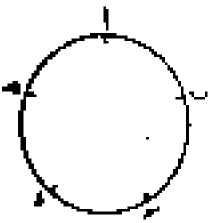
٢٠٣ — وعلينا أن ننظر بعد ذلك في معنى انفصال الأزواج separation of couples وهي علاقة أكثر تعقيداً من علاقة « بين » . ولم يلتفت إليها قليلا حتى أبرزت

---

(١) هذه الصفة توضيحية لأعداد عديدة لي يمكن أن توجد ترتيب النقاط أو في ترتيب من التراتيب (مثل الترتيب المتصل) لو يكون هي ... معدودة ... الترتيب ... من ... التي يجري على هذا التصور . ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ...

الهندسة الإسقاطية أيضًا. فقد بين ڤايلاتي[1] أن هذه العلاقة تتطلب دائمًا مثل علاقة « بين » علاقة متعدية لا متماثلة بين حدين. غير أن هذه العلاقة الخاصة بزوج من الحدود لها دائمًا صلة بثلاثة حدود ثابتة أخرى من المجموعة، كالحال في « بين » حين رأينا أنها متصلة بحدين ثابتين. كذلك من الواضح أنه حيثما وجدت علاقة متعدية لا متماثلة تعلق كل زوج من الحدود في مجموعة لا تقل عن أربعة حدود، وجدت عندئذ أزواج من الأزواج لها علاقة الانفصال separation. وبذلك يكون في استطاعتنا التعبير عن الانفصال كما فعلنا في « بين » بواسطة علاقات متعدية لا متماثلة مع حدودها. ونشرع الآن أولا في بحث معنى الانفصال.

يمكن أن ندل على أن ا، حـ منفصلتان بواسطة ب، د بالرمز ا ب حـ د. فإذا كانت ا، ب، حـ، د، هـ أي خمسة حدود في المجموعة احتجنا إلى أن تكون الخواص الآتية قائمة بالنسبة لعلاقة الانفصال (ويلاحظ أن الأخيرة منها فقط هي التي تحتوي على خمسة حدود).



(١) ا ب حـ د = ب ا د حـ

(٢) ا ب حـ د = ا د حـ ب

(٣) ا ب حـ د تستبعد ا حـ ب د

(٤) يجب أن نحصل على ا ب حـ د أو ا حـ د ب أو ا د حـ ب

(٥) ا ب حـ د، ا حـ د هـ معًا يستلزمان ا ب د هـ[2].

ويمكن توضيح هذه الخواص بوضع خمس نقط على محيط دائرة، كما هو موضح بالشكل. وأي علاقة بين زوجين من الحدود لها هذه الخواص سنسميها علاقة الانفصال بين الزوجين. وسيتبين أن هذه العلاقة متماثلة ولكنها ليست على العموم متعدية.

٢٠٤ — حيثما وجدت علاقة متعدية لا متماثلة ع بين أي حدين في مجموعة لا تقل عن أربعة حدود، نشأت بالضرورة علاقة الانفصال. ففي أي متسلسلة إذا كان لأربعة حدود هذا الترتيب وهو ا ب حـ د، كانت ا، حـ منفصلتين بواسطة ب، د. وقد رأينا أن كل علاقة متعدية لا متماثلة تولد متسلسلة بشرط

---

(١) Rivista di Matematica V, pp. 75-76. See also Pieri, I Principii della Geometria di posizione, Turin, 1898, § 7.

(٢) هذه الخواص مأخوذة عن ڤايلاتي. انظر المرجع السابق ص ٧٦.

وجود حالتين متعاقبتين على الأقل من العلاقة المذكورة . وفى هذه الحالة يكون الانفصال مجرد امتداد لعلاقة « بين » . فإذا كانت ع علاقة متعدية لا متماثلة ، وكان ا ع ب ، ب ع حـ ، حـ ع د ، إذن ا ، حـ منفصلان بواسطة ب ، د . فوجود مثل هذه العلاقة شرط كاف للانفصال .

وهى أيضا شرط ضرورى . ولنفرض أن هناك علاقة انفصال ، ولنفرض ا ، ب ، حـ ، د ، هـ خمسة حدود من المجموعة التى تنطبق العلاقة عليها . فإذا اعتبرنا ا ، ب ، حـ ثوابت ، واعتبرنا د ، هـ متغيرين ، أمكن أن تتولد اثنتا عشرة حالة . وبفضل الخواص الأساسية الخمسة المذكورة سابقا يمكننا إدخال الرمز ا ب حـ د هـ ليدل على أنه إذا حذفنا حرفاً من هذه الخمسة كان للأربعة الباقية علاقة الانفصال المبينة بالرمز الناتج . وهكذا من الخاصية الخامسة نجد أن ا ب حـ د ، ا حـ د هـ تستلزمان ا ب حـ د هـ [1] . وهكذا تنشأ الحالات الاثنتا عشرة من تبديل د ، هـ مع إبقاء ا ، ب ، حـ ثوابت . (من الملاحظ أن ظهور حرف فى النهاية أو البداية لا يحدث أى فرق ، مثال ذلك أن ا ب حـ د هـ هى عين الحالة التى تكون فيها هـ ا ب حـ د . وبذلك يمكننا أن نقرر عدم وضع د أو هـ قبل ا) . من هذه الحالات الاثنتى عشرة نجد أن ستا فيها د قبل هـ ، وست فيها هـ قبل د . وفى الحالات الست الأولى نقول إن د تسبق هـ بالنسبة لجهة ا ب حـ . وفى الحالات الأخرى نقول إن هـ تسبق د . ولكى نبحث فى حالات محدودة سنقول إن ا تسبق كل حد آخر ، وأن ب تسبق حـ [2] . سنجد إذن أن علاقة السبق لا متماثلة متعدية ، وأن كل زوج من الحدود فى مجموعتنا فهو بحيث يسبق أحدهما ويتبعه الآخر . وبهذه الطريقة تختزل علاقة الانفصال من الناحية الصورية على الأقل إلى ما اجتمع من (ا يسبق ب ، ا ب يسبق حـ د ، ا حـ يسبق د) .

هذا الاختزال المذكور reduction عظيم الأهمية لأسباب كثيرة . فهو أولا يبين أن التمييز بين المتسلسلات المفتوحة والمقفلة مصطنع بعض الشيء . لأن

(١) البرهان على ذلك فيه بعض الشيء [illegible] ما أعرف عنه [illegible] وهو موجود عند Pieri بالمرجع السابق .

(٢) انظر المرجع السابق Pieri, p. 42.

المتسلسلة ولو أنها قد تكون فى أول الأمر من النوع المسمى مقفلا ، فإنها تصبح بعد إدخال العلاقة المتعدية المذكورة مفتوحة ، ويكون ا بدايتها ولكن عسى ألا يكون لها حد أخير ولا ترجع من أى جهة إلى ا . وهو ثانياً بالغ الأهمية فى الهندسة ، لأنه يوضح كيف ينشأ الترتيب على الخط المستقيم الناقص بخواص إسقاطية بحتة وذلك بطريقة أكثر إرضاء من طريقة شتاوت[1] Staudt . وهو أخيراً عظيم الأهمية من جهة أنه يوحد بين مصدرى الترتيب ، وهما « بين » والانفصال ، لأنه يبين أن العلاقات المتعدية اللاتماثلة تكون موجودة دائما حيث تحصل أيهما ، وأن أى واحدة منهما تستلزم الأخرى . ذلك أنه بواسطة علاقة السبق يمكن لنا أن نقول إن حداً واحداً بين حدين آخرين ، مع أننا بدأنا فقط من انفصال الأزواج .

٢٠٥ — وفى الوقت نفسه لا يمكن أن نعتبر هذا الاختزال أكثر من إجراء صورى (ويبدو كذلك أن هذه الأقوال بالنسبة للاختزال المناظر له فى حالة « بين ») . أى أن الحدود الثلاثة ا ، ب ، حـ جوهرية للتعريف ولا يمكن حذفها ، لأنها هى التى بالعلاقة معها أمكن تعريف علاقتنا المتعدية اللاتماثلة . وليس فى هذا الاختزال من سبب لافتراض وجود أى علاقة متعدية لا تماثلة مستقلة عن جميع ، الحدود الأخرى غير تلك المتعلقة بها على الرغم من أن اختيار هذه الحدود الأخرى هو اختيار تحكمى . ومما يوضح هذه الحقيقة أن الحد ا الذى لا يمتاز بخاصية جوهرية يظهر كأول المتسلسلة . وحيثما توجد علاقات متعدية لا تماثلة مستقلة عن كل صلة خارجية ، فلا يمكن أن يكون للمتسلسلة طرف أول تحكمى ، علما بأنها ربما لا يكون لها طرف أول بتاتا . وبذلك تبقى العلاقة الرباعية الحدود للانفصال سابقة منطقياً على العلاقة الثنائية الحدين الناتجة ، ولا يمكن تحليل الأولى إلى الأخيرة .

٢٠٦ — ولكن ليس قولنا إن الاختزال صورى أنه لا مدخل له فى توليد الترتيب ، على العكس إمكان هذا الاختزال كان سببا فى جعل العلاقة الرباعية الحدود تؤدى إلى الترتيب . والعلاقة المتعدية اللاتماثلة الناتجة هى فى الواقع علاقة بين

---

(١) تتضح مزايا هذه الطريقة فى كتاب بيرى المذكور سابقاً ، حيث أمكن بإدقة استنتاج كثير من الأشياء التى كان يظهر أنها لا تخضع للبرهان الإسقاطى من مقدمات إسقاطية . انظر الجزء السادس الباب الخامس والأربعين .

خمسة حدود ؛ ولكن حين يحتفظ بثلاثة منها ثابتة ، فإنها تصبح بالنسبة للحدين الآخرين علاقة لا متماثلة ومتعدية . وهكذا مع أن « بين » تنطبق على مثل هذه المتسلسلات ؛ ومع أن جوهر الترتيب يقوم هنا وفي أي مكان آخر على أن حداً واحداً له مع حدين آخرين علاقات عكسية لا متماثلة ومتعدية ؛ إلا أن مثل هذا الترتيب إنما يمكن أن ينشأ في مجموعة تشتمل على الأقل على خمسة حدود ؛ لأن هذه العلاقة الخاصة تحتاج إلى خمسة حدود . وينبغي أن نلاحظ أن « جميع » المتسلسلات حين نفسرها على هذا النحو فهي متسلسلات مفتوحة بمعنى وجود علاقة ما بين أزواج الحدود ، وليست أي قوة من قوى هذه العلاقة مساوية لعكسها أو لعلاقة التطابق .

٢٠٧ — ولنلخص الآن هذه المناقشة الطويلة المعقدة ، فنقول : الطرق الست التي سردناها في الباب الرابع والعشرين لتوليد المتسلسلات هي جميعاً طرق متميزة تميزاً أصلياً ، ولكن الثانية منها هي وحدها فقط الأساسية ؛ وأما الخمسة الباقية فتتفق في أنها يمكن ردها إلى الثانية ، فضلاً عن أن إمكان ردها إلى الثانية هو وحده الذي يجعلها تؤدي إلى نشأة الترتيب . وأقل قضية ترتيبية يمكن وضعها كلما كان هناك ترتيب أصلاً ، فهي من هذه الصورة : « ص بين س ، ط » . وهذه القضية تعني أن « هناك علاقة متعدية لا متماثلة تقوم بين س ، ص وبين ص ، ط » . وكان في الإمكان تخمين هذه النتيجة البسيطة جداً من أول الأمر ، ولكن كان علينا أن نبحث في جميع الحالات التي يظهر أنها استثنائية قبل أن نرسي النتيجة على قواعد سليمة .

العلاقات اللاتماثلية

٢٠٨ – لقد رأينا أن الترتيب كله يتوقف على العلاقات المتعدية اللاتماثلية ، ولما كان مثل هذه العلاقات مما لم يقبل المنطق التقليدي التسليم به ، وكان عدم التسليم بها أحد المصادر الرئيسية للتناقض الذي وجدته الفلسفة النقدية في الرياضة ، كان من المستحسن قبل أن نمضي فيما نحن بصدده أن نرتاد روضة المنطق البحت ، ونرسي الأساس الذي يجعل التسليم بهذه العلاقات لازما . وبعد ذلك ، أي في الباب الحادي والخمسين من الجزء السادس سنحاول الرد على الاعتراضات العامة للفلاسفة على العلاقات . وكل ما يعنيني في الوقت الحاضر هو العلاقات اللاتماثلية .

ويمكن تقسيم العلاقات إلى أربعة فصول من حيث أن لها إحدى خاصتين : التعدي[1] والتماثل . والعلاقات من مثل س ع ص تستلزم دائماً ص ع س تسمى "متماثلة" . والعلاقات التي هي بحيث س ع ص ، ص ع ط تستلزم دائماً س ع ط تسمى "متعدية" . والعلاقات التي ليس لها الخاصية الأولى ، فأسميها غير متماثلة ؛ والعلاقات التي لها العلاقة المقابلة ؛ أي التي فيها س ع ص تستبعد دائماً ص ع س فأسميها لاتماثلية . والعلاقات التي ليست لها الخاصية الثانية فأسميها غير متعدية . أما تلك التي لها الخاصية أن س ع ص ، ص ع ط يستبعدان دائماً س ع ط فأسميها لا متعدية . وجميع هذه الحالات يمكن توضيحها من العلاقات الإنسانية . فالعلاقة أخ أو أخت ، متماثلة ومتعدية إذا سلمنا بأن الرجل يمكن أن يكون أخ نفسه ، وأن المرأة يمكن أن تكون أختا لنفسها . والعلاقة « أخ » غير متماثلة ولكنها متعدية ، والأخ غير الشقيق « أو « الأخت غير الشقيقة » علاقة متماثلة ولكنها غير متعدية ، « والزوج » Epouse علاقة متماثلة ولكنها لا متعدية ، والحفيد لاتماثلية ولكنها متعدية . والأخ غير الشقيق للأب (أو للأم) غير متماثلة وغير متعدية . وإذا حرم زواج

---

(١) يبدو أن دي مورغان كان أول من استخدم هذا الاصطلاح بهذا المعنى . انظر Camb. Phil. Trans. IX, p. 104. X, p. 346. والاصطلاح في الوقت الحاضر شائع في الاستعمال .

الطبقة الثالثة third marriages فإنها تكون لامتعدية. وابن الزوج (أو ابن الزوجة) لاتماثلية وغير متعدية ؛ وإذا حرم زواج الطبقة الثانية second marriages فإنها تكون لامتعدية ، وأخ الزوج (أو الزوجة) غير متماثلة وغير متعدية . وأخيراً فالأب لاتماثلية لامتعدية . ومن العلاقات غير المتعدية وغير اللامتعدية توجد إلى حد علمنا حالة هامة واحدة وهي حالة التعدد diversity ؛ ومن العلاقات غير التماثلية، ولكنها غير لاتماثلية، توجد أيضاً على ما يبدو حالة هامة واحدة وهي حالة التزوم ؛ وفي الحالات الأخرى التي نصادفها عادةً تكون العلاقات إما متعدية أو لامتعدية ، وتكون متماثلة أو لاتماثلية .

٢٠٩ — والعلاقات التي هي متعدية وتماثلية معاً ، تكون صورتها من طبيعة التساوي. وأي حد من مجال هذه العلاقة تكون له العلاقة المذكورة مع نفسه ، ولو أنه قد لا تكون له مثل هذه العلاقة مع أي حد آخر . ذلك أننا إذا رمزنا للعلاقة بعلامة التساوي ، وكانت ا أي حد من مجال العلاقة ، فإنه لا يوجد حد آخر ب بحيث يكون ا = ب . فإذا كان ا ، ب متطابقين فإن ا = ا . وإذا لم يكونا متطابقين فما دامت العلاقة تماثلية فإن ب = ا ، وبما كانت العلاقة متعدية ، وكان ا = ب فإن ب = ا ، وينتج من هذا أن ا = ا ؛ وقد سمى بيانو خاصة العلاقة التي تضمن أنها تقوم بين الحد ونفسه الانعكاس Reflexiveness ، وأثبت — على خلاف ما كان عليه الاعتقاد قبله — أنه لا يمكن استنتاج هذه الخاصة من التماثل والتعدي ، فذلك أنه لا واحدة من هاتين الخاصيتين تقرر أنه توجد ب بحيث أن ا = ب ولكنها تقرر فقط ما ينتج في حالة وجود مثل هذه الباء ، وإذا لم توجد هذه الباء ، فإن إثبات أن ا = ا ينهار[1] . ومع ذلك فخاصة الانعكاس هذه تؤدي إلى منغوبات ؛ ولا توجد غير علاقة واحدة تصح فيها هذه الخاصة دون قيد وهي علاقة التطابق . وفي جميع الحالات الأخرى تقوم هذه الخاصة فقط بين حدود فصل معين . فالتساوي الكمي مثلاً يكون انعكاسياً فقط من حيث كونه ينطبق على الكميات ؛ أما بالنسبة للحدود الأخرى فمن الخطأ القول أن نقرر أن لها تساوياً كمياً مع نفسها . والتساوي المنطقي ، كذلك ، يكون انعكاسياً فقط في حالة الفصول

(١) انظر ... Revue de Mathématique. T. VII, p. ..; Notations de Logique Mathématique. Turin, 1894, p. 45. F. 1901, p. 193.

أو القضايا أو العلاقات ، والآنية إنما تكون انعكاسية بالنسبة للأحداث فقط . مع
وعلى ذلك فإننا إذا أعطينا علاقة تماثلية متعدية ، غير علاقة التطابق ، فلا يمكننا
تقرير الانعكاس إلا بالنسبة لحدود فصل معين . وعن هذا الفصل ، فيما عدا مبدأ
التجريد (الذى ورد ذكره فى الجزء الثالث ، الباب الرابع عشر ، والذى سيأتى
الكلام عنه بالتفصيل عما قليل) فلا حاجة بنا إلى تعريف ما فيما خلا امتداد العلاقة
التماثلية المتعدية موضوع الكلام . وعندما يكون الفصل معرفاً على هذا النحو ،
فالانعكاس داخل هذا الفصل ينتج كما رأينا عن التعدى والتماثل .

٢١٠ — وباستخدام ما أسميته مبدأ التجريد[١] يمكن توضيح فكرة الانعكاس
توضيحاً أفضل إلى حد ما . ولقد عرّف[٢] بيانو عملية أسماها التعريف بالتجريد ،
وأوضح أنها شائعة الاستخدام فى الرياضيات . وبيان هذه العملية كما يأتى :
عندما تكون لدينا علاقة متعدية وتماثلية وانعكاسية (داخل مجالها) فإذا قامت هذه
العلاقة بين و ، ف فإننا نعرف شيئاً جديداً φ (و) بحيث تكون مطابقة إلى
φ (ف) وبذلك نكون قد حللنا العلاقة إلى عينية العلاقة بالنسبة للحد الجديد φ (و)
أو φ (ف) . ولكى تكون هذه العملية مشروعة كما وضعها بيانو يلزمها بديهية .
وهى البديهية التى تقول بأنه إذا وجدت حالة للعلاقة التى نتكلم عنها ، وجدت φ (و)
أو φ (ف) . وهذه البديهية هى المبدأ الذى أسميه مبدأ التجريد ، وهو الذى تجرى
صياغته على وجه الدقة كما يأتى : « كل علاقة متعدية متماثلة يوجد منها على الأقل
حالة واحدة ، يمكن تحليلها إلى علاقة جديدة لحد جديد ، والعلاقة الجديدة هى
بحيث لا يمكن أن توجد هذه العلاقة بين أى حد وبين أكثر من حد واحد ولكن
عكسها ليست له هذه الخاصية » . وهذا المبدأ بالكلام الدارج يُقرر أن العلاقات
المتماثلة المتعدية تنشأ عن خاصية مشتركة ، مع إضافة أن هذه الخاصية تقوم بالنسبة
للحدود التى تتصف بها ، فى علاقة لا يمكن لأى شىء آخر أن يقوم بها بالنسبة
لهذه الحدود . وهى بذلك تعطى النص الدقيق للمبدأ الذى كثيراً ما يطبقه الفلاسفة ،

(١) البديهية المفروض أنها متضمنة فى هذا المبدأ ولكنها ليست صياغة دقيقة ضرورية وهى
معروفة ، وموجودة عند De Morgan, Camb. Phil. Trans. Vol. X, p.

(٢) Notations de Logique Mathématique, p. 45.

وهو أن العلاقات المماثلة المتعدية تنشأ من تطابق المضمون . ومع ذلك فتطابق المضمون عبارة غاية في الغموض ؛ تعطيها القضية السالفة الذكر ، في الحالة الراهنة ، معنى دقيقاً ولكنه معنى لا يحقق بأى حال الغرض من تلك العبارة ، وهو على ما يبدو رد العلاقات إلى صفات للحدود المتعلقة .

ونستطيع الآن أن نأتى على بيان أوضح لخاصة الانعكاس . ولتكن ع هي علاقتنا المماثلة . ولتكن ح هي العلاقة اللامماثلة التي يجب أن تقوم بين حدين من الحدود ذات العلاقة ع وبين حد ثالث ما . فتكون القضية س ع ص مكافئة إلى : يوجد حد ما ا بحيث أن س ح ا ، ص ح ا ، وينتج عن هذا أنه إذا كان س تابعاً لا أعضاء ميدان ح أى أنه إذا كان هناك أي حد بحيث أن س ح ا ، فإن س ع س ، ذلك أن س ع س ما هي إلا س ح ا ، س ح ا . ولا ينتج عن هذا بطبيعة الحال أنه يوجد حد آخر ص بحيث يكون س ع ص . وبذلك تكون اعتراضات بيانو على البرهان التقليدي للانعكاس صحيحة . ولكنا بتحليل العلاقات المماثلة المتعدية قد حصلنا على برهان لخاصة الانعكاس مع بيان القيود الدقيقة التي تخضع لها .

٢١١ — نستطيع الآن أن نرى الأسباب التي من أجلها استبعدنا طريقة سابقة من طرق توليد المتسلسلات ، وهي طريقة قد يكون بعض القراء توقعوا وجودها ، وهذه هي الطريقة التي يكون فيها الوضع مجرد وضع نسبي ؛ ولم نقبل هذه الطريقة بالنسبة للكميات كما سبق في البند ١٥٤ من الباب التاسع عشر . ولما كانت فلسفة المكان والزمان كلها مرتبطة بموضوع مشروعية هذه الطريقة ، التي هي في الواقع موضوع الوضع المطلق أو النسبي ، يجدر بنا أن نبحثها هنا ، ونبين كيف أن مبدأ التجريد يؤدى إلى النظرية المطلقة للوضع .

فإذا نظرنا في متسلسلة مثل متسلسلة الأحداث ، وإذا رفضنا التسليم بالزمان المطلق ، كان علينا أن نسلّم بثلاث علاقات أساسية بين الأحداث وهي : الآنية والقبلية والبعدية . ويمكن تقرير مثل هذه النظرية صوريا كما يأتى : ليكن معلوماً فصلاً من الحدود هو بحيث أن أي حدين س ، ص فيه إما علاقة لامماثلة متعدية ق أو العلاقة العكسية ق أو علاقة مماثلة متعدية ع . ولنفرض أيضا أن

س ع ص . ص ق ط تستلزمان س ق ط ؛ وأن س ق ص ، ص ع ط تستلزمان س ق ط عندئذ يمكن ترتيب جميع الحدود في متسلسلة مع احتمال أن يكون كثير من الحدود لها نفس الوضع في المتسلسلة . وعلى حسب النظرية العلاقية للوضع ، ليس هذا الوضع إلا العلاقة المتعدية المتماثلة ع لعدد من الحدود الأخرى ؛ ولكن طبقاً لمبدأ التجريد ينتج أنه توجد علاقة مّا ح بحيث إذا كان س ع ص فإنه يوجد حد واحد مّا ر يحقق س ح ر ، ص ح ر ، وسنرى عندئذ أن جميع هذه الحدود ر التي تقابل مجموعات مختلفة من الحدود الأصلية ، تؤلف هي أيضاً متسلسلة ولكنها بحيث يكون فيها كل حدين مختلفين لهما علاقة لا متماثلة (صوريا حاصل الضرب ح ع ح ، وهذه الحدود ر هي إذن الأوضاع المطلقة للسببات والمضادات ، ونكون قد رددنا طريقتنا السابقة لتوليد المتسلسلات إلى الطريقة الأساسية الثانية ، وبذلك لا تكون هناك متسلسلات ذات أوضاع نسبية فقط ، وإنما هي الأوضاع ذاتها التي تكون المتسلسلات في جميع الأحوال[1] .

٢١٢ — ويمكننا الآن أن نواجه بعض الفلسفة للعلاقات . وجميع ما ذكرنا عن الترتيب ، والكلام الخاص عن التجريد ، سيكون بطبيعة الحال موضع اعتراضات شديدة من أولئك الفلاسفة — وأخشى أن يكونوا الغالبية — الذين يقولون بأنه ليس هناك علاقات ذات صحة مطلقة وميتافيزيقية . ولست أريد هنا إلى الخوض في الموضوع العام ولكني سأكتفي باستعراض الاعتراضات على أي تحليل للعلاقات اللاتماثلية .

والرأي السائد — عادة بصفة لا شعورية ويستخدم في الحاجة حتى عند من لا ينادون به صراحة — أن جميع القضايا تتكون في النهاية من موضوع ومحمول ، وعندما يصادف هذا الرأي قضية علاقية فهناك طريقتان لمعالجتها ، ويمكن تسمية إحداها بالطريقة الموندية monadistic والأخرى بالطريقة الواحدية monistic فإذا أعطينا القضية ا ع ب حيث ع علاقة مّا ، فإن وجهة النظر الموندية تحللها إلى قضيتين ، يمكن أن نسميهما ا ر، ، ب ر، ، وهاتان القضيتان تعطيان ا ، ب على التوالي صفتين مفروض أنهما معاً تكافئان ع . أما وجهة النظر الواحدية فهي

---

(١) تجد بحثاً صوريا عن الوضع النسبي في كتاب فريدريك — انظر Sur une extension de l'idée d'ordre, Congrès, Vol. III, p. 235.

على عكس ذلك تعتبر العلاقة خاصية للكل المكوَّن من ا ، ب وبهذه الكيفية تكون مكافئة لقضية يمكن أن نرمز إليها بالرمز (ا ب) ر. ويمثل ليبنتز (وبوجه عام) لوتز وجهة النظر الأولى ، ويمثل الثانية سبينوزا ومستر برادلي . ولنفحص هاتين الوجهتين من النظر على التعاقب عند تطبيقهما على العلاقات اللاتماثلية ، وعلى وجه التحديد فلننظر في علاقتي الأكبر والأصغر .

٢١٣ ــ وقد عبّر ليبنتز في وضوح بديع عن وجهة النظر المونادية في العبارة التالية . « النسبة أو التناسب بين خطين ل ، م يمكن النظر إليها من عدة طرق ؛ كالنسبة بين الأكبر ل إلى الأصغر م ، أو كالنسبة بين الأصغر م إلى الأكبر ل وأمَّا أخيراً كشيء مَّا مستخرج منهما معاً على أنه النسبة بين ل ، م دون اعتبار إلى أيهما المقدم وأيهما التالي ، أو أيهما الموضوع ، وأيهما المحمول . . . وفي الطريقة الأولى نجد أن ل الأكبر ، وفي الثانية م الأصغر هي موضوع ذلك العرض الذي يسميه الفلاسفة علاقة . ولكن أيهما سيكون الموضوع في الطريقة الثالثة ؟ ولا يمكن القول إن كلا من ل ، م معاً هما موضوع مثل هذا العرض . إذ لو كان الأمر كذلك لحصلنا على عرَض accident في موضوعين إحدى قدميه في الواحد وقدمها الأخرى في الآخر ، وهذا يخالف فكرة الأعراض . وعلى ذلك فيجب أن نقول إن العلاقة في الطريقة الثالثة هي في واقع الأمر خارج العرَضيّين ، ولكنها لما كانت لا بالمادة ولا بالعرض فيجب أن تكون مجرد شيء مثالي . والنظر فيه مع ذلك لا يخلو من فائدة » .

٢١٤ ــ والطريقة الثالثة للنظر إلى علاقة الأكبر والأصغر هي على وجه التقريب ما يقول به الواحديون . وفي رأيهم أن الكل المركب من ل ، م هو الموضوع وعلى ذلك فنظرتهم إلى النسبة لا ترغمنا ، كما افترض ليبنتز ، على وضعها بين ذوات القدمين . وسنقصر اهتمامنا في الوقت الحاضر على الطريقتين الأوليين . في الطريقة الأولى للنظر إلى الأمر أي « ل (أكبر من م) » نجد أن الكلمات الموضوعة بين قوسين تعتبر صفة تصف ل . ولكننا عندما نفحص هذه الصفة نجدها مركبة ؛ فهي تتركب على الأقل من الجزأين أكبر ، م ، وكلٌ من هذين الجزأين أساسي . فقولنا إنّ " ل أكبر " لا يدل أبداً على ما نقصده من معنى . ومن المحتمل جداً أن " م أكبر "

أيضا . فالصفة التي نفترض أنها تصف ا تتضمن إشارة إلى م . ولكن النظرية المذكورة لا توضح معنى هذه الإشارة . والصفة التي تتضمن إشارة إلى م من الواضح أنها صفة « بالنسبة إلى م » . وما هذه إلا طريقة ملتوية لوصف العلاقة . بعبارة أخرى ، إذا كانت ا ذات صفة تناظر حقيقة كونها أكبر من م ، فهذه الصفة من الوجهة المنطقية تابعة للعلاقة المباشرة بين ا ، م وليست سوى مجرد اشتقاق من هذه العلاقة . وإذا استبعدنا م ، فلا شيء يبدو في تحليل ا يميز بينها وبين م . ومع ذلك في نظرية العلاقات التي نتكلم عنها ، ا يجب أن تختلف اختلافاً ذاتياً عن م . ولذلك فسنجد أنفسنا مرغمين ، في جميع حالات العلاقات اللاتماثلية ، على التسليم باختلاف نوعي بين الحدين المتعلقين . ولو أن تحليل أي منهما لا يكشف عن وجود أية خاصية متصلة بالموضوع يملكها الواحد ولا نجدها في الآخر . ويعد هذا بالنسبة للنظرية الموندية تناقضا . وهو تناقض يهدم النظرية ذاتها التي ينبع منها (1) .

ونعرض في تطبيق النظرية الموندية على العلاقات الكمية . فالقضية « ا أكبر من ب » يمكن تحليلها إلى قضيتين ، إحداهما تعطى ا صفة ، والأخرى تعطى ب صفة أخرى . وأكبر الظن أن القائل بالرأي الذي نحن بصدده سيذهب إلى أن ا ، ب كميتان لا مقداران وأن الصفتين المطلوبتين هما مقدارا ا ، ب ولكن عليه في هذه الحالة أن يسلم بعلاقة بين المقدارين من النوع اللاتماثلي ، والتي كان على المقدارين تفسيرها وحينئذ يحتاج المقداران إلى صفتين جديدتين وهكذا إلى ما لا نهاية له ، والعملية اللانهائية يجب أن تتم قبل أن نجد معنى للقضية الأصلية . وهذا النوع من العمليات اللانهائية موضع اعتراض لأن الغرض الوحيد منه هو تفسير معنى قضية معينة ، ومع ذلك فلا تقربنا أي خطوة من خطواته إلى هذا المعنى (2) . فلا يمكننا إطلاقا

---

(1) ظهر بحث نشر في مجلة Mind, N. S. No. بعنوان « العلاقة بين العدد والكمية » ، وقد كتبت هذا البحث حين كنت لا أزال متمسكا بالنظرية الموندية عن العلاقات ، ومن أجل ذلك كانت النتيجة المذكورة آنفا لا يمكن تعميمها بالصورة الموجودة في تحليلها من كلامي على نفس المسألة .

(2) حيث نحتاج إلى عدد لا نهائي من النوع المذكور الذي بالضرورة بصدد قضية عن الوحدة اللانهائية والمعنى كلي في جزء منه في نفس الوقت .

السبب أن نأخذ مقادير ا ، ب أنهما الصفتان المطلوبتان . ولنمض في البحث فنقول : ولكننا إذا أخذنا أي صفات كانت ما عدا تلك التي لها بالحد الآخر صلة ، فلن نتمكن حتى من الناحية الصورية أن نقرر شيئاً عن العلاقة دون افتراض مثل تلك العلاقة بين الصفتين . لأن مجرد اختلاف الصفتين لن يترتب عليه سوى علاقة تماثلية . مثال ذلك لو كان الحدان المذكوران لونين مختلفين لوجدنا أن ما بين ا ، ب هي علاقة الاختلاف في اللون وهي علاقة لن تجعلها عناية بحثنا لها لاتماثلية . وإذا رجعنا إلى المقادير فلا يمكن أن نقول سوى أن ا يختلف عن ب في المقدار مما لا يعطينا أي إشارة إلى أيهما الأكبر . وهكذا يجب أن تكون صفتا ا ، ب بحيث يتعلق كل منهما بالحد الآخر . كما جاء في تحليل ليبنتز . فصفة ا يجب أن تكون « أكبر من ب » . وصفة ب يجب أن تكون « أصغر من ا » . وبذلك يختلف ا عن ب . ما دام لهما صفتان مختلفتان — لأن ب ليس أكبر من ب ، و ا ليس أصغر من ا — ولكن الصفتين خارجتان بمعنى أن صفة ا لها صلة مع ب ، وصفة ب لها صلة مع ا . ولهذا السبب تفشل محاولة تحليل العلاقة . فنضطر إلى التسليم بما قصدت النظرية إلى تجنبه وهو العلاقة التي تسمى « خارجية » أي تلك العلاقة التي لا تستلزم أي تعقيد في أي حد من الحدين المتعلقين .

ويمكن إثبات نفس النتيجة من العلاقات اللاتماثلية بوجه عام . ما دامت هذه النتيجة إنما تتوقف على أن كلا من التطابق والتعدد متماثلان . وليكن ا ، ب بينهما علاقة لا تماثلية ع ، بحيث يكون ا ع ب ، ب ع̆ ا . ولتكن رمز الصفتين المفروضتين (وهما كما رأينا من قبل لا بد أن يكون لكل منهما صلة بالحد الآخر) م ، ه على التوالي بحيث يصبح الحدان على النحو الآتي : ا م ، ب ه . وهنا نجد أن م له صلة مع ا ، و ه مع ب . ونحن نعلم أن م ، ه يختلفان ما داما لا متماثلين . ولكن ا ، ب ليس بينهما اختلاف ذاتي مناظر للعلاقة ع وسابق عليها . وحتى إذا كان بينهما اختلاف ، فإن فقط الاختلاف لا بد أن يكون لها ذاتها علاقة شبيهة بالعلاقة ع . وبذلك لن نظفر بشيء ، علماً أن م أو ه يعبر عن اختلاف بين ا و ب . ولكنه اختلاف بعيد عن أن يكون متقدماً على العلاقة وإنما هو في الواقع العلاقة ع نفسها . ما دام م أو ه يتطلب صلة بحد

غير الحد الذي هو صفة له . وما دام م و ي كلاهما يفترض العلاقة ع ، فلا يمكن استخدام الاختلاف بين م و ح للدلالة على اختلاف ذاتي بين ا و ب . وهكذا نصبح مرة أخرى إزاء اختلاف ليس له نقطة بداية سابقة ، مما يدل على أن بعض العلاقات اللاتماثلية لا بد أن تكون مطلقة ، وأن إحدى هذه العلاقات المطلقة اللاتماثلية على الأقل يجب أن تكون عنصراً مكوّناً لأي علاقة تماثلية قد نعرضها .

من السهل انتقاد النظرية المونادية من وجهة نظر عامة باستخراج المتناقضات التي تنشأ من علاقات الحدود بالصفات المتصلة بالعلاقة الأولى التي حللناها . وليست هذه الاعتبارات مرتبطة ارتباطاً خاصاً باللاتماثل ، ولكنها تنتمي للفلسفة العامة ، وقد بسطها أنصار النظرية الواحدية . أما عن النظرية المونادية فإليك ما يقوله عنها برادلي[1] باختصار القول : نحن مسوقون بمبدأ الانشطار دون أن نصل إلى غاية . فكل صفة لها علاقة ؛ لذا تبعا لذلك ضرب من التعدد داخل طبيعتها ذاتها . وهذا التعدد لا يمكن أن يكون ثابتا مباشرة للصفة ، ومن ثمّ يجب أن تتنازل الصفة عن وحدتها لعلاقة داخلية . فإذا تحررت الصفة على هذا النحو ، فينبغي أن يكون كل مظهر من المظاهر المتعددة ، من حيث إنه شيء له علاقة ، شيئاً كذلك وراء العلاقة . وفي هذا التعدد انقضاء الجزم على الوحدة الداخلية لكل مظهر منها بحيث تحتاج إلى علاقة جديدة . وهكذا إلى غير النهاية » . ويبقى بعد ذلك أن نفحص عن أمر النظرية الواحدية ألا تصبح حين تتجنب هذه الصعوبة خاضعة لصعوبات أخرى لا تقل عنها خطورة .

٢١٥ ـ تذهب النظرية الواحدية إلى أن كل قضية علاقية ا ع ب تنحل إلى قضية تتصل بالكل الذي يتركب من ا ، ب وهي قضية يمكن أن تدل عليها بقولنا (ا ب) ع . ويمكن أن نفحص هذه الوجهة من النظر كما فحصنا الوجهة الأخرى إما بالإشارة خاصة إلى العلاقات اللاتماثلية ، وإما من جهة الفلسفة العامة . ويقول أصحاب هذا المذهب إن الكل يشتمل بذاته على تعدد ، وإنه يتركب الاختلافات ، وإنه يحقق أعمالا أخرى شبيهة بذلك . أما أنا فأصرح بعجزي عن نسبة أي معنى

---

(1) Appearance and Reality, 1st Edition, p. 31.

مضبوط لهذه العبارات . ومع ذلك فسأبذل قصارى جهدى .

يقولون: إن القضية « ا أكبر من ب » لاتقرر فى الحقيقة شيئاً عن ا أو عن ب ، بل عنهما معاً . ولما كانت القضية تدل على الكل الذى يتألف من (ا ب) فسنفترض أن (ا ب) يشتمل على تعدد فى المقدار » . وإذا نحن أغفلنا جانبا جميع الحجج ذات الصفة العامة فى الوقت الراهن ، نجد اعتراضا خاصاً يوجه للعبارة السالفة فى حالة اللاتماثل . ذلك أن (ا ب) متماثلة بالنسبة لـ ا ، ب . وتنطبق بذلك خاصية الكل بالضبط فى الحالة التى تكون فيها ا أكبر من ب وكذلك فى حالة ما تكون ب أكبر من ا . وقد أدرك ليبنتز الذى لم يقبل النظرية الواحدية ولم ير ما يدعو لتبريرها هذه الحقيقة بوضوح . كما يتبين من النص المذكور آنفا . ذلك إنه طبقا لطريقته الثالثة فى النظر إلى النسبة ratio ، لا تعتبر أى الجزأين المقدم وأيهما التالى ، والحق أنه من الواضح بما فيه الكفاية أن الكل (ا ب) من حيث أنه كذلك ليس فيه مقدم ولا تال . ولكى نميز بين كل هو (ا ب) من كل آخر هو (ب ا) إذا وجب أن نفعل ذلك عند تفسير اللاتماثل . فسنضطر إلى الرجوع عن الكل إلى الأجزاء وما بينها من علاقة . لأن (ا ب) و (ب) يشتملان بالضبط على الأجزاء نفسها . ولا يختلفان فى أى اعتبار كان سوى جهة العلاقة بين ا ، ب . وقولنا « ا أكبر من ب » و « ب أكبر من ا » قضيتان يشتملان بالضبط على نفس المكونات . وينشأ عنهما تبعا لذلك بالضبط نفس الكل ، ولا يقوم الخلاف بينهما إلا فى أن أكبر فى الحالة الأولى علاقة من ا إلى ب ، وفى الحالة الثانية من ب إلى ا . وبذلك يكون تمييز الجهة : أى التمييز بين علاقة لا تماثلية وعكسها ، تمييزا تعجز النظرية الواحدية عن العلاقات عن تفسيره بالكلية .

ويمكن أن نبسط من الحجج ذات الصفة العامة ما لا حصر له ؛ غير أن الحجة التالية يبدو أنها داخلة فى موضوعنا بوجه خاص . فعلاقة الكل بالجزء هى نفسها علاقة لاتماثلية ، والكل ــ كما يهوى الواحديون بوجه خاص أن يقولوا ــ متميز عن جميع أجزائه ، تحديداً وجملة فى آن واحد . ولذلك حين نقول : « ا جزء من ب » فنحن نعنى فى الواقع بفرض صحة النظرية الواحدية أن نقرر شيئا عن الكل المكون من ا و ب والذى لا يجب أن يلتبس مع ب . ولو لم تكن القضية

المتعلقة بهذا الكل الجديد قضية كل وجزء . فلن يكون ثمة أحكام صادقة عن الكل والجزء ، ويكون من الخطأ تبعاً لذلك القول بأن العلاقة بين الأجزاء هي حقاً صفة للكل . أما إذا كانت القضية الجديدة قضية كل وجزء ، فستحتاج إلى قضية جديدة لتفسيرها . وهكذا دواليك . ولو ذهب الواحدي كإجراء يائس إلى القول بأن الكل المركب من ا ، ب ليس متميزاً عن ب ، فإنه مضطر إلى التسليم بأن الكل هو (بمعنى المنطق الرمزي) مجموع أجزائه . وهذا إلى جانب هجرانه موقفه تماماً يجعله لا مناص له من اعتبار الكل مماثلا بالنسبة لأجزائه — وهي وجهة نظر رأينا من قبل أنها عقيمة . ومن ثم نجد أن الواحديين مسوقون نحو وجهة النظر القائلة بأن الكل الوحيد الحق ، وهو المطلق ، لا أجزاء له أصلا ، وأنه لا قضية خاصة به أو أي شيء آخر صادق — وهي وجهة نظر لا مفر من تناقضها عند مجرد تقريرها . ولا ريب في أن الرأي القائل بأن جميع القضايا ينتهي بها الأمر إلى أن تتناقض مع ذاتها ، هو رأي مقضي عليه إذا سلمنا به أن يكون أيضا متناقضا مع نفسه .

٢١٦ — رأينا حتى الآن أن العلاقات اللاتماثلية غير معقولة طبقاً لكلا النظريتين العاديتين للعلاقات (١) . ولذلك ما دامت مثل هذه العلاقات داخلة في العدد ، والكمية ، والترتيب ، والمكان ، والزمان ، والحركة فلن نستطيع أن نطمع في فلسفة مرضية للرياضيات ، ما دمنا متمسكين بالنظرية القائلة بأنه لا علاقة يمكن أن تكون « خارجية بحتة » . ولكن سرعان ما نصطنع نظرية مختلفة عنها حتى يتضح أن الألغاز المنطقية التي حار فيها الفلاسفة قد أصبحت مصطنعة . ومن بين الحدود التي تعتبر عادة أنها علاقية وهي المماثلة والمعادلة — مثل التساوي والآنية — قادرة أن ترد إلى ما يعني في شيء من الإبهام بتطابق المضمون identity of content ، ولكن هذا بدوره يجب أن يُحلل إلى عينية sameness العلاقة مع حد ما آخر . ذلك أن الخواص المزعومة لحد من الحدود ليست في الواقع سوى حدود أخرى تقوم بينها علاقة ما . والخاصية المشتركة لحدين هي حد ثالث لهما به نفس العلاقة .

---

(١) سيجد القارئ مناقشة للنظريتين من وجهة نظر أخرى في الجزء السادس الفصل الرابع والخمسين .

هذا الاستطراد الطويل الذي خاض بنا في بحر المنطق أوجبته أهمية الترتيب الجوهرية ، كما أوجبته استحالة تفسير الترتيب دون أن نصرف النظر عن أعم العقائد الفلسفية وأكثرها شيوعا . ذلك أنه فيما يتعلق بالترتيب كل شيء يتوقف على الاتجاه واختلاف الجهة . غير أن هذين المفهومين لا يعقلان في ظل المنطق التقليدي . وسنفحص في الباب التالي عن علاقة اختلاف الجهة ، كما يظهر في الرياضيات باسم اختلاف العلامة sign . وسنتناول في هذا الفحص الموضوعات الرياضية مرة أخرى . ولو أن الحديث لا يزال في حاجة إلى بعض المنطق البحت . وهذا ما يشغل جميع الأبواب الباقية من هذا الجزء .

اختلاف الجهة واختلاف العلامة

٢١٧ — رأينا حتى الآن أن الترتيب يتوقف على العلاقات اللاتماثلية ، وأن هذه العلاقات اللاتماثلية لها على الدوام جهتان ، مثل القبل والبعد ، الأكبر والأصغر ، الشرق والغرب ، إلخ . واختلاف الجهة مرتبط ارتباطا وثيقا (ولو أنه ليس متطابقا) مع اختلاف العلامة الرياضي . وهذه فكرة لها أهمية جوهرية في الرياضيات ، ولا يمكن بمقدار علمي تفسيرها بعبارات من أي أفكار أخرى . ويبدو أن أول فيلسوف تنبه لأهميتها هو كانط . في كتابه "محاولة لإدخال فكرة المقادير السالبة في العلم" [1].

نجده على بينة من التقابل المنطقي وتقابل السلب والإيجاب . وفي المناقشة التي أوردها في كتابه " في السبب الأول لتمييز بين المساحات في المكان " [2].

نجد إدراكا كاملا لأهمية اللاتماثل في العلاقات المكانية ، كما نجد دليلا يستند إلى تلك الحقيقة على أن المكان لا يمكن أن يكون علائقيا تماما [3]. ولكن يبدو من المشكوك فيه أنه أدرك الصلة بين هذا اللاتماثل وبين اختلاف العلامة . في عام ١٧٦٣ من الثابت أنه لم ينتبه إلى هذه الصلة ، لأنه اعتبر الألم مقدارا سلبيا من اللذة ، وزعم أنه من الممكن إضافة لذة كبيرة إلى ألم صغير فيحصل عنهما لذة أصغر [4] ، وهي وجهة نظر تبدو فاسدة منطقيا ونفسانيا على حد سواء . وفي كتابه « التمهيد » (١٧٨٣) Prolegomena (الفقرة ١٣) جعل — كما هو معروف — العلاقات اللاتماثلية المكانية أساساً لاعتبار المكان مجرد صورة للحدس ، لا كما يظهر من مناقشته عام ١٧٦٨ ، أن المكان لا يمكن أن يقوم — كما ذهب إلى ذلك ليبنتز — على مجرد علاقات بين الأشياء ، ثم عجز ، تبعا لتمسكه بالاعتراض المنطقي على العلاقات

(١) Versuch den Begriff der negativen Grösse in die Weltweisheit einzuführen (1763).

(٢) Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume 1768.

(٣) انظر بوجه خاص نشرة Hart. Vol. II, pp. 386, 391.

(٤) نشرة Hart. Vol. II, 83.

والذى ناقشناه فى الباب السابق ، أن يخلص فكرة المكان المطلق ذى العلاقات اللاتماثلية بين أجزائه من التناقض . ومع أنى لا يمكن أن أعتبر هذه النظرية الكانطية الأخيرة والأكثر تميزا ، تقدماً عما رآه سنة ١٧٦٨ ، إلا أن الفضل يرجع دون نزاع إلى كانط فى أنه أول من لفت النظر إلى الأهمية المنطقية للعلاقات اللاتماثلية .

٢١٨ — وأعنى باختلاف الجهة ، على الأقل فى المناقشة الراهنة ، الاختلاف بين العلاقة اللاتماثلية وعكسها . ومن الحقائق المنطقية الأساسية أنه إذا فرضت أى علاقة ع ، وأى حدين ا ، ب ، أمكن تكوين قضيتين من هذين العنصرين ، الأولى تجعل العلاقة من ا إلى ب (وأسميها ا ع ب) ، والثانية (ب ع ا) تجعل العلاقة من ب إلى ا . وهاتان القضيتان هما أبداً مختلفتان ، ولو أنه فى بعض الأحيان (كما فى حالة التعدد) تستلزم كل منهما الأخرى . وفى أحوال أخرى ، مثل اللزوم المنطقى : لا تستلزم إحداهما الأخرى ولا سلبها . على حين أنه فى أحوال ثالثة تستلزم إحداهما سلب الأخرى . ولن أتكلم عن اختلاف الجهة إلا فى الحالات من النوع الثالث . ففى هذه الحالات ا ع ب تستبعد ب ع ا . ولكن هنا تنشأ حقيقة منطقية أخرى أساسية ، وهى أنه فى جميع الأحوال التى لا تستلزم ا ع ب ب ع ا ، هناك علاقة أخرى متعلقة بـ ع يجب أن تقوم بين ا ، ب . وبعبارة أخرى هناك علاقة ع̆ بحيث أن ا ع ب تستلزم ب ع̆ ا ، وكذلك ب ع̆ ا تستلزم ا ع ب . فعلاقة ع لـ ع̆ هى اختلاف الجهة . وهذه العلاقة هى علاقة واحد بواحد ، ومتماثلة ، ولا متعدية ، ووجودها أصل المتسلسلات . والتمييز بين العلامات ، وقسمٌ كبير من الرياضيات فى الواقع .

٢١٩ — وثمة سؤال ذو أهمية عظمى فى المنطق ، وبوجه خاص فى الاستنباط يمكن أن يثار بالنسبة لاختلاف الجهة . هل ا ع ب ، ب ع̆ ا قضيتان مختلفتان فى الحقيقة ، أو أنهما يختلفان لغويا فقط ؟ فقد يمكن أن نذهب إلى أنه ليس ثمة إلا علاقة واحدة هى ع ، وأن جميع التمييزات الضرورية يمكن الحصول عليها من القضيتين ا ع ب ، ب ع ا . وقد يمكن أن يقال إن مطالب النطق والكتابة تضطرنا إلى أن نذكر إما ا أو ب أولا ، مما يخيل إلينا فرقا بين ، ا أكبر من ب ،

وبين « ب أصغر من ا » . أما في الحقيقة فهما قضيتان متطابقتان . غير أننا إذا اصطنعنا هذه الوجهة من النظر ، لكان من العسير علينا أن نفسر التمييز الذي لا شك فيه بين أكبر وأصغر ، لأن لكل من هاتين اللفظتين دون ريب معنى ؛ حتى لو لم يكن ثمة أي حدود مذكورة يتعلقان بها . ولا نزاع في أن لهما معان مختلفة ، ولا نزاع في أنهما علاقتان . هذا إذا كان لا بد لنا أن نتمسك بأن « ا أكبر من ب » و « ب أصغر من ا » قضية واحدة ، فلا بد لنا من القول بأن كلا من أكبر وأصغر يدخلان في كل من هاتين القضيتين مما يبدو ظاهر البطلان ؛ أو نقول إن ما يحصل بالفعل هو شيء مختلف عن الاثنين ، وهو ثالث العلاقة الثالثة المجردة المذكورة عن ليبنتز فيما نقلناه عنه سابقا . وفي هذه الحالة يكون الفرق بين أكبر وأصغر فرقاً في أساسه يتضمن تعلقاً بالحدين ا ، ب . ولكن التسليم بهذه الوجهة من النظر لا يخلو من دور ، إذ ليس الأكبر أو الأصغر هو بالذات المتقدم . ولا حيلة لنا إلا أن نقول إنه حين يكون الأكبر مقدماً فالعلاقة هي أكبر ، وحين يكون الأصغر ، فالعلاقة هي أصغر . ويترتب على ذلك فيما يبدو أنه يجب التسليم بأن ع ، عَ علاقتان متميزتان . ولا مهرب لنا من هذه النتيجة بتحليل الصفات الذي حاولناه في الباب السابق ، وذلك حين حللنا ا ع ب إلى ا ق ، ب ق ويناظر كل ب صفتان هما م ، مَ ، كما يناظر كل ا صفتان هما ه ، هَ . وهكذا إذا كانت عَ هي أكبر ، كانت ه أكبر من ا ه ، وكانت هَ أصغر من ا أو العكس بالعكس . غير أن الفرق بين ه ، هَ يفترض من قبل وجود فرق بين أكبر وأصغر ، بين ع ، عَ ، ولذلك لا يمكن أن يفسره . من أجل ذلك لا بد من أن يكون ع ، عَ متميزين . وأن « ا ع ب تستلزم ب عَ ا » لا بد أن يكون متباعدا حقيقيا .

وأنتقل الآن إلى الصلة بين اختلاف الجهة وبين اختلاف العلامة . وسنجد أن اختلاف العلامة مشتق من اختلاف الجهة ، حيث أنه اختلاف لا يوجد إلا بين حدود هي إما علاقات لاتماثلية ، أو مترابطة بها . ولكننا سنجد في حالات معينة بعض التعقيدات في التفاصيل تتطلب مزيدا من المناقشة .

لا يتصل اختلاف العلامات تقليديا إلا بالأعداد والمقادير ، ويرتبط ارتباطا

وثيقا بالجمع . قد يقال إن وضع العلامة ، عملية لا يمكن استخدامها استخداما مقيدا حيث لا يكون ثمة جمع ، بل إن الجمع من بعض الوجوه قد يكون على الجملة كذلك ممكنا ، حيث يمكن تمييز العلامة . ولكننا سنجد أن اختلاف العلامة ليس له صلة وثيقة بالجمع والطرح . ولكي نوضح هذه المسألة لا بد أول كل شيء أن ندرك في وضوح أن الأعداد والمقادير التي ليس لها علامة ، تختلف اختلافا أساسيا عن الأعداد والمقادير الموجبة . والخلط في هذه النقطة يقضي على أي نظرية صحيحة للعلامات بالفشل .

٢٢٠ — إذا أخذنا أولا الأعداد المتناهية رأينا أن الأعداد الموجبة والسالبة تنشأ على النحو التالي[1] . إذا كانت ع تدل على العلاقة بين عددين صحيحين يفضلها الثاني منهما يتلو الأول ، كانت القضية م ع ن مكافئة لما يُعبّر عنه عادة بقولنا م + ١ = ن غير أن النظرية الراهنة ستطبق على المتواليات بوجه عام ، ولا تتوقف على النظرية المنطقية للأعداد الأصلية التي بسطناها في الجزء الثاني . ففي القضية م ع ن يعتبر العددان م ، ن خاليين تماما من العلامة ، وذلك بحسب استنتاجهما من التعريف المنطقي . فإذا قلنا م ع ن ، ن ع ق ، ثم قلنا م ع٢ ق ، وهكذا في القوى الأعلى ، كانت كل قوة لـ ع علاقة لا تماثلية . ومن السهل بيان أن عكسها هو نفس قوة ع ، كما أنها هي نفسها قوة ع . وهكذا فإن م ع ا ق تكافىء ق ع˘ا م . وهاتان هما القضيتان اللتان تكتبان عادة هكذا م + ا = ق ، ق — ا = م . وهكذا فإن عا ، ع˘ا هي حقاً الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة ، وهي مع أنها مرتبطة بـ ا إلا أنها متميزة تماماً عن ا . وعلى ذلك ففي هذه الحالة نجد الترابط مع اختلاف الجهة ظاهراً ومستمراً .

٢٢١ — أما بالنسبة للمقادير فلا بد من التمييز بين عدة حالات . فعندنا (١) مقادير ليست علاقات ، ولا امتدادات stretches (٢) امتدادات (٣) مقادير هي علاقات .

(١) المقادير من هذا الفصل ليست في ذاتها موجبة ولا سالبة . ولكن

---

(١) ما ذكر خلاصة نظرية ند . ويمكن بشيء أكثر تعميم في بحث الحسن للمتواليات فقرة ٢٣٢ .

مقدارين منهما ، كما بينا في الجزء الثالث ، يُمثِّلان إما مسافة وإما امتداداً ، والمسافة أو الامتداد تكون دائما إما موجبة أو سالبة . كما يكونان علاوة على ذلك دائما قابلين للجمع . ولكن لما لم تكن مقاديرنا الأصلية علاقات ولا امتدادات ، فالمقادير الجديدة التي نحصل عليها هي من نوع مختلف عن المقادير الأصلية . مثال ذلك أن الفرق بين لذتين ، أو مجموعة اللذات المتوسطة بين لذتين ، ليس لذة ؛ فهو في الحالة الأولى علاقة ، وفي الحالة الثانية فصل".

(٢) ليس للمقادير الانقسام بوجه عام علامة ، ولكن حين تكون مقاديرَ امتدادات تكتسب علامة بطريق الترابط Correlation . ويتميز الامتداد عن المجموعات الأخرى بأنه يشتمل على جميع الحدود في متسلسلة متوسطة بين حدين معلومين . وإذا ضم الامتداد إلى جهة من جهتي العلاقة اللاتماثلة التي لا بد من وجودها بين الطرفين النهائيين ، يكتسب الامتداد نفسه جهةً ويصبح لا متماثلا . ومعنى ذلك أننا نستطيع التمييز بين (١) مجموعة الحدود القائمة بين ا ، ب بصرف النظر عن الترتيب ؛ (٢) الحدود من ا إلى ب ؛ (٣) الحدود من ب إلى ا . وهنا نجد أن الحالتين الثانية (٢) والثالثة (٣) معقدتان ، لأن كلا منهما يتركب من الحالة الأولى (١) ومن أحد جهتي العلاقة . ولا بد من تسمية إحداهما موجبة والأخرى سالبة . وقد جرت العادة واستعمال الجمع إلى القول بأنه حيث تتألف المتسلسلات من مقادير إذا كانت ا أصغر من ب كانت الحالة (٢) موجبة والحالة (٣) سالبة . أما حيث لا تكون المتسلسلات كما هو الأمر في المتصلة غير مؤلفة من مقادير ، يصبح تحديد أيها موجب وأيها سالب تحكميا حسب ما نشاء . فعندنا في كل من الحالتين نفس العلاقة بالنسبة إلى الجمع ، والتي تجرى على النحو التالي : أي زوج من المجموعات يمكن جمعهما لتكوين مجموعة جديدة ، ولكن لا يمكن جمع أي زوج من الامتدادات لتكوين امتداد جديد ؛ إذ لكي يمكن ذلك يجب أن تكون نهاية أحد الامتدادين متطابقة مع بداية الآخر . وبذلك يمكن جمع الامتداد ا ب ، مع الامتداد ب حـ لتكوين الامتداد ا حـ . وإذا كان ا ب ، ب حـ لهما نفس الجهة ، كان ا حـ أكبر من كلٍّ منهما . وإذا اختلفت جهتهما كان ا حـ أصغر من أحدهما . وفي هذه الحالة الثانية يعتبر جمع ا ب ،

ب حـ كطرح بين ا ب ، حـ ب ، حيث أن ب حـ ، حـ ب موجب وسالب على التوالي . وإذا كانت الامتدادات موضع بحثنا قابلة لقياس عددي ؛ فجمع أو طرح مقاييسها يعطي مقياس حاصل جمع الامتدادات أو طرحها إذا كانت بحيث تسمح بالجمع أو الطرح . غير أن تقابل الإيجاب والسلب كما هو واضح يتوقف على هذه الحقيقة الجوهرية وهي أن المتسلسلة موضع البحث تنشأ عن علاقة لاتماثلة

(٣) المقادير التي هي علاقات إما أن تكون علاقات متماثلة أو لا متماثلة . في الحالة الأولى إذا كان ا حدا في مجال إحداهما ، فالحدود الأخرى في المجالات المتعددة يمكن أن ترتب في متسلسلة بشرط توافر شروط معينة(١) وذلك حسب علاقاتها بالحد ا من حيث أن هذه العلاقات أكبر أو أصغر . وقد يكون هذا التنظيم مختلفاً حين نختار حدا آخر غير الحد ا . أما في الوقت الراهن فسنفترض اختيار ا على الدوام . وحين يتم ترتيب الحدود في متسلسلة فقد يحصل أن بعض المواضع في المتسلسلة أو كل المواضع يشغلها أكثر من حد . ولكن في أي حالة فإن اجتماع الحدود بين ا وبين حد آخر وليكن م هو اجتماع معين ؛ يؤدي إلى امتداد له جهتان . وعندئذ يمكننا أن نربط بين مقدار علاقة ا م ، وبين أي جهة من هاتين الجهتين . ونحصل بذلك على علاقة لا متماثلة بين ا ، م . وهي علاقة لها كالعلاقة الأصلية مقدار . وهكذا يمكن أن نرد حالة العلاقات المتماثلة بعلاقات اللامتماثلة . وهذه العلاقات الأخيرة تؤدي إلى العلامات ، وإلى الجمع والطرح بنفس الطريقة بالضبط التي تؤدي إليها الامتدادات ذات الجهة . والفرق الوحيد بينهما هو أن الجمع والطرح من النوع الذي سميناه في الجزء الثالث علاقيا relational . وهكذا في جميع أحوال المقادير ذات العلاقة يكون الاختلاف بين جهتي العلاقة اللامتماثلة منبع اختلاف العلامة .

الحالة التي ناقشناها فيما يختص بالامتدادات ذات أهمية جوهرية في الهندسة . فهاهنا مقدار بغير علامة ، وعلاقة لا متماثلة بغير مقدار ، وارتباط ما وثيق بين الاثنين . والجمع بينهما معاً يعطي مقداراً له علامة . وجميع المقادير الهندسية ذات العلامة تنشأ على ذلك النحو . غير أننا نجد تعقيداً غريبا في حالة الأحجام . فالأحجام كما يبدو لأول وهلة كميات لا علامة لها . ولكنها تظهر دائما في الهندسة

(١) انظر بند ٢١٥ .

التحليلية موجبة أو سالبة . وهنا نجد العلاقات اللامتماثلة (إذ هناك علاقتان) تظهر كحدود بينها علاقة متماثلة ، ولكنها مع ذلك هنا مقابل من نوع شديد الشبه بعكس العلاقة اللامتماثلة .

٢٢٣ — الخط المستقيم الوصفي هو علاقة متسلسلة بفضلها تكوّن النقط متسلسلة[1] . ويمكن أن تسمى أي جهة من جهتي الخط المستقيم الوصفي شعاعا ray ، وندل على الجهة بسهم . وأي شعاعين ليسا في مستوى واحد ، فلهما إحدى علاقتين يمكن أن نسميها يمينية أو يسارية على التوالي ، وهذه العلاقة

متماثلة ولكنها غير متعدية . وهي جوهر التمييز المألوف بين اليمين واليسار .

وهكذا تكون علاقة العمود المرتفع على خط من الشمال إلى الشرق يمينية ، والمرتفع على خط من الجنوب إلى الشرق يسارية . ولكن مع أن العلاقة متماثلة ، إلا أنها تتغير إلى مقابلها بتغيير أي حد من العلاقة إلى عكسها . فلو فرضنا علاقة اليمين ى وعلاقة اليسار س (وهي ليست ى) . فإذا كان ا ، ب شعاعين يمينيين بالتبادل ، كان ا ى ب ، آ س ب ، آ س ت ، ا ى ب ، ب ى ا ، ت س ا ، ب س آ ، ت ى ا ومعنى ذلك أن كل زوج من الخطين المستقيمين اللذين ليسا في مستوى واحد ينشأ عنهما ثماني علاقات من هذا القبيل ، منها أربعة يمينية وأربعة يسارية . ومع أن الاختلاف بين س ، ى كما هو قائم ليس اختلاف جهة ، إلا أنه مع ذلك اختلاف إيجاب وسلب ، وهو العلة في أن أحجام الأجسام الرباعية المسطوح هنا دائما بحسب عدداتها علامات . ولكن ليس ثمة صعوبة في تتبع منطق الرجل العادي حين يرد اليمين واليسار للعلاقات اللامتماثلة . فالرجل العادي يأخذ أحد الشعاعين (وليكن ا) ثابتا — وإذا كان واضحا يأخذ ا عموداً رأسيا — ثم يعتبر اليمين واليسار خاصتين للشعاع المفرد ب ، أو علاقتين لأي نقطتين تحددان ب ،

---

(١) انظر الجزء السادس .

وهما تعبيران لشيء واحد . وبهذه الطريقة يصبح اليمين واليسار علاقتين لاتماثليتين بل يصبح لهما درجة محدودة من التعدى من ذلك النوع الذى بيناه فى الطريقة الخامسة لتوليد المتسلسلات (فى الباب الرابع والعشرين) . هذا وينبغى ملاحظة أنهما تشغله ثابتا يجب أن يكون شعاعاً لا مجرد خط مستقيم . مثال ذلك إذا كان مستويان غير متعامدين بالتبادل فليس أحدهما يميناً والآخر يساراً بالنسبة لخط تقاطعهما ، ولكن ذلك فقط بالنسبة لكل من الشعاعين المتعلقين بهذا الخط[1] . فإذا جعلنا هذا فى بالنا واعتبرنا المستويات الكاملة لا أنصاف المستويات فإن اليمين واليسار بطريق الشعاع المذكور يصبحان لا تماثليين ويصبح كل منهما عكس الآخر . وبذلك تكون العلامات المتصلة باليمين واليسار قائمة كجميع العلامات الأخرى على العلاقات اللاتماثلية . وهذه النتيجة يمكن اعتبارها نتيجة عامة .

٢٢٣ - اختلاف الجهة أعم ظهما من اختلاف العلامة : ما دام ذلك الاختلاف موجودا فى أحوال تعجز الرياضة (على الأقل فى الوقت الحاضر) عن بحثها . ويكاد يبدو أن اختلاف العلامة قلما ينطبق على العلاقات التى ليست متعدية ، أو ليست ذات صلة وثيقة بعلاقة ما متعدية . فن التناقض مثلا أن نعتبر علاقة حادثة بوقت حدوثها ، أو علاقة كمية بمقدارها ، على أنها تعطى اختلاف علامة . لأن هذه العلاقات هى التى يسميها الأستاذ شرودر erschöpft[2] ، أى أنها إذا قامت بين ا ، ب فلا يمكن أبدا أن تقوم بين ب وبين حد ما ثالث . وبلغة الرياضة يكون مربعها صفرا . فهذه العلاقات لا ينشأ عنها اختلاف علامة .

وجميع المقادير ذات العلامة كما أدى بحثنا السابق إما علاقات ، أو تصورات مركبة تدخل العلاقات فيها . ولكن ماذا نحن قائلون فى أمر أحوال التقابل العادية كالخير والشر ، اللذة والألم ، الجمال والقبح ، الرغبة والنفور ؟ أما الزوج الأخير فى غاية التعقيد ، ولو عرضنا لتحليلهما لبعثت عنهما أحكاماً أجمعت الآراء على بطلانها . أما بالنسبة للأزواج الأخرى فيبدو عندى أن تقابلها من نوع شديد

---

(١) وهذا يرجع إلى أن الانتقال من أحد المستويين إلى الآخر يجب أن يتم بطريق إحدى الزوايا المادة الحادثة من تقاطعهما .

(٢) انظر Algebra der Logik, Vol III, p. 328 . هذا ويسمى الأستاذ بيرس مثل هذه العلاقات بأنها لا تتكرر .

الاختلاف عن العلاقتين اللاتماثليتين المتبادلتين بالعكس ، والأولى أنهما أشبه بتقابل الأحمر والأزرق ، أو بمقدارين مختلفين من نوع واحد . وتختلف الأزواج من التقابل المذكورة آنفا عن هذه الأنواع من التقابل التي تقوم على ما يمكن تسميته باللاتوافق التركيبي synthetic incompatibility[1] ، بأن الأولى لا تشتمل إلا على حدين لامتوافقين فقط بدلا من متسلسلة بأسرها . ويقوم اللاتوافق على أن حدين هما بالطبع لا متوافقان ، لا يمكن أن يصحبا في نفس الموضع الزمكاني ، أو لا يمكن أن يكونا محمولين لموجود واحد ، أو بوجه أعم لا يمكن أن يدخلا معاً في قضيتين صادقتين من صورة معينة لا تختلفان إلا في أن إحداهما تشتمل على أحد اللامتوافقين والأخرى تشتمل على الثاني . وهذا النوع من اللاتوافق (الذي ينتمي عادةً بالنسبة لفصل ما من القضايا إلى حدود متسلسلة معينة) فكرة في غاية الأهمية في المنطق العام ، ولكن ليس متطابقا بأي شكل مع الاختلاف بين العلاقات المتبادلة بالعكس . الواقع هذه العلاقة الأخيرة حالة خاصة لمثل هذا اللاتوافق ، ولكنها الحالة الخاصة الوحيدة التي ينشأ عنها اختلاف العلامة . وهكذا يمكن أن ننهي مناقشتنا بأن كل اختلاف علامة ينشأ أصلا من علاقات لا تماثلية متعدية ، ثم يمتد هذا الاختلاف عنها بالترابط إلى حدود لها صلات متعددة بتلك العلاقات[2] ولكن هذا تابع دائما لتقابل الأصلي الناشئ عن اختلاف الجهة .

---

(١) انظر كتاب [illegible] فلسفة ليبنتز [illegible] كمبردج ١٩٠٠ ، ص ١٩ – ٢٠ .

(٢) في الاقتصاد [illegible] يمكن أن نعتبر [illegible] علاقة إيجابية وسلبية [illegible] ويكون خطأ منطقى ذلك [illegible] ولا [illegible] في [illegible] أن يأخذ أمرا على [illegible] وبذلك [illegible] الأم والمدة بالفصل عن المال [illegible] وهذا تبديل إيجاب وسلب في مفهوم [illegible] الإنتاج .

الباب الثامن والعشرون

في الفرق بين المتسلسلات المفتوحة والمقفلة

٢٢٤ — وإذ قد بلغنا آخر الشوط في المناقشات المنطقية البحتة عن الترتيب، فلنوجه عنايتنا في حرية فكر إلى الجوانب الألصق بالرياضة من الموضوع. ولما كان حل أقدم المتناقضات وأليقها بالنظر في فكرة اللانهاية معتمداً في أساسه على فلسفة صحيحة عن الترتيب، فلا مناص من الخوض في مسائل فلسفية، لا لأنها داخلة في موضوعنا، بل لأن معظم الفلاسفة يظنونها كذلك. وسنخصص ما نزعم خلال بقية هذا الكتاب.

السؤال الذي سنعرض لمناقشته في هذا الباب هو: هل يمكننا أن نميز في نهاية الأمر بين المتسلسلة المفتوحة والمقفلة؟ وإن أمكننا ذلك فعلى أي أساس يقوم التمييز؟ لقد رأينا أن جميع المتسلسلات من الناحية الرياضية مفتوحة، بمعنى أنها كلها تتولد من علاقة لا متماثلة متعدية. أما من الناحية الفلسفية فلا بد لنا من التمييز بين الطرق المختلفة التي يمكن أن تنشأ عنها هذه العلاقة. وبوجه خاص لا يجب أن نخلط بين الحالة التي لا تتطلب هذه العلاقة فيها رجوعاً إلى حدود أخرى، وبين الحالة التي تكون فيها مثل هذه الحدود جوهرية. ومن الواضح عملياً أن ثمة فرقاً ما بين المتسلسلات المفتوحة والمقفلة — مثلاً بين خط مستقيم ودائرة، أو بين تفاخر بنسب وجماعة تتقارض الثناء. ومع ذلك ليس من السهل بيان الفرق على وجه الدقة.

٢٢٥ — حيث يكون عدد الحدود في متسلسلة متناهياً، وتتولد المتسلسلة بالطريقة الأولى التي شرحناها في الباب الرابع والعشرين، فإن الطريقة التي بها نحصل على علاقة متعدية من أخرى غير متعدية نبدأ بها، تختلف تماماً بحسب المتسلسلة أمفتوحة هي أم مقفلة؟. فإذا فرضنا ع العلاقة المولدة، ن عدد الحدود في متسلسلة، نشأ عن ذلك حالتان. وإذا رمزنا إلى علاقة أي حد بالذي يليه إلا واحداً بالرمز $ع^2$، وهكذا للقوى الأعلى، فإن علاقة $ع^ن$ ليس لها إلا إحدى قيمتين: صفر والتطابق. (بفرض أن ع علاقة واحد بواحد). لأننا إذا بدأنا

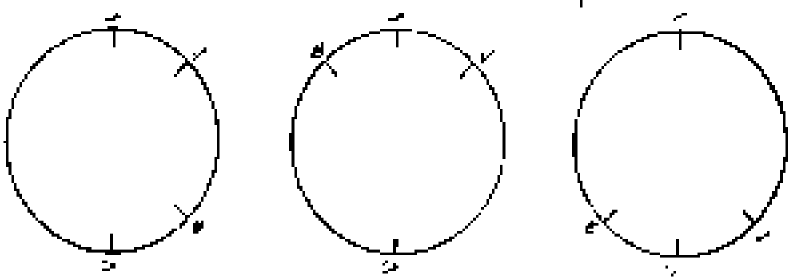
بالحد الأول ، (بفرض وجود مثل هذا الحد ، تنتهي مع عن-١ إلى الحد الأخير) ، وبذلك لا يعطى عن حداً جديداً . وليس ثمة حالة لعلاقة عن . ومن جهة أخرى قد يحصل إذا بدأنا بأي حد أن يرجع بنا عن إلى ذلك الحد مرة أخرى . وهاتان الحالتان هما البديلتان الوحيدتان الممكنتان . وفي الحالة الأولى نسمي المتسلسلة مفتوحة : وفي الثانية نسميها مقفلة . والمتسلسلة في الحالة الأولى بداية ونهاية محدودتان . وليس لها – كما هو الحال في زوايا المضلع – حدود معينة . وفي الحالة الأولى العلاقة اللاأمثالية المتعدية هي علاقة منفصلة . هي " قوة ع ليست أكبر من الحدود النونية ناقصاً واحداً ، (ن – ١) " وإذا استبدلنا بهذه العلاقة ع علاقة يمكن أن نسميها عَ تصبح متسلسلة من الصنف الثاني من الأصناف الستة . ولكن في الحالة الثانية لا يمكن أن نفعل هذا الرد البسيط إلى الصنف الثاني . لأنه في هذه الحالة يمكن اتخاذ أي حدين من المتسلسلة وليكن ا ، م ليكونا قوة عَ أو قوة عَ على حد سواء . ويصبح السؤال عن أي حدود ثلاثة بين الحدين الآخرين أمراً تحكمياً تماماً . وقد نستطيع الآن أن ندخل أولاً علاقة الانفصال separation بين حدود أربعة . ثم بعد ذلك علاقة الحد الخامس الناتجة كما هو مبين في الباب الخامس والعشرين . ثم بعد ذلك نعتبر ثلاثة حدود من علاقة الحدود الخمسة ثابتة . فنجد أن العلاقة الناتجة عن الحدين الآخرين متعدية ولاأمثالية . ولكن هنا اختيار الحد الأول في متسلسلة تحكمي تماماً ، ولم يكن كذلك من قبل . كما أن العلاقة المولدة هي في الواقع حد واحد من خمسة لا من اثنين . ومع ذلك هناك طريقة أبسط في الحالة التي ننظر فيها . ويمكن توضيح هذه الطريقة كما يأتي : في متسلسلة مفتوحة أي حدين ا ، م يعرفان جهتين يمكن وصف المتسلسلة بهما . جهة منهما هي ا التي تأتي قبل م ، وجهة هي م تأتي قبل ا . وعندئذ يمكننا القول عن أي حدين آخرين س ، ص أن جهة الترتيب من س إلى ص هي عين جهة الترتيب من ا إلى م ، أو أنها مختلفة حسب الأحوال . وبهذه الطريقة إذا اعتبرنا ا ، م ثابتين ، س ، ص متغيرين ، نحصل على علاقة متعدية لا متماثلة بين س ، ص ناتجة من علاقة متعدية لا متماثلة قائمة بين الزوج س ، ص وبين الزوج ا ، م (أو م ، ا على حسب الحالة) . ولكن هذه العلاقة المتعدية المتماثلة يمكن بمبدأ التجريد principle of abstraction أن تحلل فنجد أنها

حاصلة على خاصية مشتركة ، وهي فى هذه الحالة أن ء ، ح ثم س ، ص لهما علاقة مولدة بعين الجهة . وبذلك لا تكون العلاقة الرباعية الحدود جوهرية فى هذه الحالة . ولكن فى المتسلسلة المقفلة لا تعرف ء و م جهة المتسلسلة حتى حين يقال لنا إن ء تسبق م ، إذ يمكن أن نبدأ من ء فنصل إلى م من أى اتجاه شئنا . غير أننا إذا أخذنا حدا ثالثا ليكن ، وقررنا أن نسير من ء إلى م مارين ب ء فى طريقنا ، عندئذ تتحدد جهة المتسلسلة . والامتداد stretch ء د م إنما يشتمل على جزء واحد من المتسلسلة دون الآخر . مثال ذلك يمكن أن نذهب من إنجلترا إلى نيوزيلندا إما من الشرق وإما من الغرب ، لكن إذا قررنا المرور بالهند فى الطريق فلا بد أن نذهب شرقا . ولنتأمل الآن حدا جديدا ليكن ى ، له موضع محدود فى المتسلسلة التى تبدأ من ء ونصل إلى م مارة ب د . فنجد أن ى إما أن تأتى بين ء ، د أو بين د ، م أو بعد م . وهكذا فإن العلاقة الثلاثية الحدود ء ، د ، م كافية فى هذه الحالة لتوليد متسلسلة معينة تماماً . وعندئذ تقوم علاقة فايلاتى الخماسية الحدود على ما يأتى : أنه بالنسبة للترتيب ء د م تأتى ى قبل (أو بعد) أى حد آخر ل من المجموعة . وليس من الضرورى أن نلجأ إلى هذه العلاقة فى الحالة الحاضرة ما دامت العلاقة الثلاثية كافية . وهذه العلاقة الثلاثية الحدود يمكن تعريفها صوريا على النحو التالى : هناك بين أى حدين من المجموعة علاقة هى قوة ع أقل من النونية . ولتكن العلاقة بين ء ، د هى عم ، والعلاقة بين د ، م هى عم . فعندئذ إذا كانت س أصغر من ص عينا جهة واحدة ء د م . وإذا كانت س أكبر من ص عينا الجهة الأخرى . وكذلك سيكون بين ء ، د العلاقة ع‌س‌ـ‌ص ، وبين ء ، م العلاقة ع‌س‌ـ‌ص . فإذا كانت س أصغر من ص ، كانت ن ـ س أكبر من ن ـ ص ، وإذن كان اللاتماثل بين الحالتين مناظراً لما بين ع ، عَ . وحدود المتسلسلة ترتب ببساطة بالترابط مع عدديها س ، ص ، بحيث تسبق الأعداد الأصغر الأكبر . وهكذا لا حاجة هنا إلى العلاقة الخماسية ، ما دام كل شىء خاضعا للعلاقة الثلاثية ، وهذه بدورها ترتد إلى علاقة متعدية لا متماثلة لعددين . ولكن يبقى أن المتسلسلة المقفلة لا تزال متميزة عن المفتوحة بأن اختيار حدها الأول تحكمى .

٢٢٦ — وتنطبق مناقشة شديدة الشبه بذلك على الحالة التى تتولد فيها المتسلسلة

من علاقات ثلاثية الحدود . ولكي نحتفظ بتماثل علاقة واحد بواحد مع الحالة السابقة سنضع هذه الفروض . لتكن هناك علاقة ب لحد واحد مع حدين آخرين ، ولنسمي الحد الواحد الوسط والحدين الآخرين الطرفين . ولنفرض أن الوسط لا ينفرد بالتحديد إلا حين يعلم الطرفان ، ولنفرض أن أحد الطرفين لا يتحدد إلا بواسطة الوسط والطرف الآخر . ثم لنفرض بعد ذلك أن كل حد يقع وسطاً يقع كذلك طرفاً ؛ وأن كل حد يقع طرفا (باستثناء حالتين على الأكثر) يقع كذلك وسطا . وأخيرا إذا كانت هناك علاقة حـ وسطها ، ثم ب ، د طرفاها ، فليكن هناك دائما (فيما عدا إذا كان ب أو د أحد الحدين الاستثنائيين الممكنين) علاقة ب هي الوسط ، حـ أحد الطرفين ، وأخرى فيها د هي الوسط ، حـ أحد الطرفين . فعندئذ لا يقع ب ، حـ معاً إلا في علاقتين . هذه الحقيقة تؤلف علاقة بين ب ، حـ . ولن يكون هناك سوى حد واحد بجانب ب له هذه العلاقة الجديدة مع حـ . وبواسطة هذه العلاقة إذا كان هناك حدان استثنائيان ؛ أو لم يكن هناك سوى حد واحد إذا كانت المجموعة لانهائية ؛ فيمكن أن نشئ متسلسلة مفتوحة . فإذا كانت العلاقة الثنائية الحدين لامتماثلة فالأمر واضح . ولكن يمكن البرهنة على نفس النتيجة إذا كانت العلاقة الثنائية الحدين متماثلة . ذلك أنه سيكون عند كل نهاية ولتكن ا علاقة لامتماثلة لـ ا مع الحد الوحيد الذي هو وسط بين ا وبين حد آخر ما . وهذه العلاقة إذا ضربت في القوة النونية للعلاقة الثنائية الحدين ، حيث ن + ١ هو أي عدد صحيح أصغر من عدد حدود المجموعة ، أعطت علاقة تقوم بين ا وبين عدد (لا يزيد على ن + ١) من حدود المجموعة ليس فيها سوى حد واحد فقط هو بحيث لا يعطي أي عدد أصغر من ن علاقة ا مع هذا الحد . وبذلك نحصل على ترابط لحدودنا مع الأعداد الطبيعية natural التي تولد متسلسلة مفتوحة فيها ا أحد طرفيها . أما من ناحية أخرى إذا لم يكن لمجموعتنا حدود استثنائية ولكنها متناهية ، فسنحصل عندئذ على متسلسلة مقفلة . ولنفرض أن علاقتنا الثنائية الحدين هي ق ، ولنفرض أولا أنها متماثلة . (إنها متماثلة إذا كانت علاقتنا الأصلية الثلاثية الحدود متماثلة بالنسبة للأطراف . عندئذ كل حد حـ من مجموعتنا سيكون له العلاقة ق بحدين آخرين لهما بالنسبة لبعضهما العلاقة $ق^{٢}$. وفي جميع العلاقات من صورة ق ن تقوم بين حدين معلومين سيكون هناك علاقة م هي الأصغر وهذه هي التي يمكن

تسميها العلاقة الرئيسية للحدين . ولنفرض أن عدد حدود المجموعة ن . عندئذ سيكون لكل حد من المجموعة علاقة أساسية ق م لكل حد آخر ، حيث أن م هو عدد صحيح موجب ليس أكبر من ن/٢ . فإذا فرضنا أي حدين ح ، ص من المجموعة ، بشرط ألا يكون عندنا ح ق ن/٢ ص (وهي حالة لا تنشأ إذا كان ن فرديا) فنفترض وجود ح ق م ص ، حيث أن م أصغر من ن/٢ . وهذا الفرض يعرف جهة المتسلسلة يمكن أن نوضحها كالآتي : إذا فرضنا ح ق ل ك ، حيث ل أصغر أيضا من ن/٢ ، فيمكن أن تنشأ ثلاث حالات بفرض أن م أكبر من ل . فقد نحصل على ص ق م−ل ك ، أو إذا كان م + ل أصغر من ن/٢ فقد نحصل على ص ق م+ل ك أو إذا كانت م + ل أكبر من ن/٢ فقد نحصل على ص ق ن/٢−م−ل ك . (ونحن نختار دائما العلاقة الرئيسية) . وهذه الحالات الثلاث موضحة بالرسم كما يلي :



ونقول فيما يختص بهذه الحالات الثلاث إنه بالنسبة للجهة ح ص (١) ك تأتى بعد ح ، ص وفى (٢) ، (٣) ك تأتى قبل ح ، ص . وإذا كانت ل أصغر من م ، وكان ك ق ل−م ص . فسنقول إن ك توجد بين ح ، ص فى اتجاه ح ص . فإذا كان ن عددا فرديا شمل ذلك جميع الأحوال . أما إذا كان زوجا فعلينا أن ننظر فى الحد ح فنجد أنه بحيث يكون ح ق ن/٢ ح′ . وهذا الحد هو إن شئت أن تقول مقابل بالقطب antipodal لـ ح . ويعرف بأنه أول حد فى المتسلسلة حين نأخذ بمنهج التعريف سالف الذكر . وإذا كان ن فرديا كان الحد الأول هو ذلك الحد من الفصل (٣) الذى تكون فيه ح ق (ن−١)/٢ ك . وبذلك نكتسب المتسلسلة ترتيبا معينا ، ولكن اختيار الحد الأول كجميع المتسلسلات المقفلة تحكمى .

٢٢٧ ــ الحالة الوحيدة الباقية هي تلك التي تبدأ من علاقات رباعية الحدود ، ويكون للعلاقة المولدة خمسة حدود على التحديد . وهذه هي حالة المقسمة الإسقاطية التي نجد فيها أن المتسلسلة هي بالضرورة مقفلة ، أي عند اختيار حدودنا الثلاثة الثابتة للعلاقة الخماسية الحدود ، فليس ثمة أي قيد لاختيارنا ، ويمكن أن يعرف أي واحد من هذه الثلاثة بأنه الأول .

٢٢٨ ــ الخلاصة : كل متسلسلة من حيث إنها متولدة من علاقة متعدية لاممَاثلة بين أي حدين من المتسلسلة ، فهي مفتوحة عندما لا يكون لها بداية ، أو كان لها بداية ليست تحكمية . وتكون مقفلة حين يكون اختيار بدايتها تحكميا . فإذا كانت ع هي العلاقة المكونة كانت بداية المتسلسلة حدا له العلاقة ع لا العلاقة عَ . وحيث تكون ع علاقة أصلية ثنائية الحدين ، فيجب أن تكون البداية إن وجدت معينة تماماً . ولا يمكن أن تكون البداية تحكمية إلا حين تتطلب ع حدا ما آخر (يمكن أن يعتبر ثابتا) بجانب الحدين اللذين تكون العلاقة بالنسبة لهما متعدية ولا مماثلة (وعلينا أن نعتبر الحدين متغيرين) . يترتب على ذلك أنه في جميع أحوال المتسلسلات المقفلة يجب أن تكون العلاقة المتعدية اللامماثلة علاقة تتطلب حدا ثابتا أو أكثر من حد ثابت بالإضافة إلى الحدين المتغيرين . على الرغم من وجود علاقة واحد بواحد لا مماثلة إذا كانت المتسلسلة منفصلة discrete . هذا ولو أن كل متسلسلة مقفلة يمكن رياضيا أن تقلب مفتوحة ؛ وكل متسلسلة مفتوحة يمكن أن تصبح مقفلة ، إلا إنه يوجد بالنسبة لطبيعة العلاقة المولدة تمييز حقيقي بينهما ، ولكنه مع ذلك تمييز أهميته أدنى إلى أن تكون فلسفية منها رياضية .

الباب التاسع والعشرون

المتواليات والأعداد الترتيبية

٢٢٩ ــ حان الآن الوقت أن ننظر في أبسط أصناف المتسلسلات اللامتناهية ، نعني تلك التي تنتمي إليها الأعداد الطبيعية natural ذاتها . وسأرجئ إلى الجزء التالي البحث في جميع الصعوبات المفروضة الناشئة عن لا نهاية مثل هذه المتسلسلات ، مقتصرا هنا على بسط النظرية الأولية عنها في صورة لا تفترض الأعداد[1] .

المتسلسلات التي نبحثها الآن هي تلك التي يمكن أن ترتبط حدا بحد مع الأعداد الطبيعية دون حاجة إلى أي تغيير في ترتيب المعهود . ولكن لما كانت الأعداد الطبيعية حالة خاصة لمثل تلك المتسلسلات ، وكان في الإمكان استنباط جميع الحساب والتحليل من أي واحدة من هذه المتسلسلات دون رجوع إلى العدد ، فقد يحسن أن نقوم بتعريف المتواليات التي لا تتطلب أي رجوع للعدد .

المتوالية متسلسلة منفصلة ، ذات حدود متعاقبة ، لها بداية ولكن ليس لها نهاية ، ولها أيضا اتصال . وكنا قد فسرنا معنى الاتصال في الباب الرابع والعشرين . غير أننا لا نستطيع أن نقدم هذا التفسير الآن . وبوجه عام إذا كانت المتسلسلة غير متصلة انقسمت إلى جزأين أو أكثر كل منها متسلسلة قائمة بذاتها . فالأعداد والمحطات كلاهما يكون متسلسلة غير متصلة ، وكذلك الخطان المستقيمان المتوازيان . وحيث تنشأ المتسلسلة أصلا بواسطة علاقة متعدية لا متماثلة فيمكن التعبير عن الاتصال بهذا الشرط ، وهو أن أي حدين من متسلسلتنا يجب أن تكون لهما العلاقة المولدة . ولكن المتواليات فهي متسلسلات من النوع الذي يمكن أن يتولد بالطريقة الأولى من الطرق الست ، أي بعلاقة واحد بواحد لا متماثلة . ولكي ننتقل من هذه العلاقة إلى علاقة متعدية استخدمنا من قبل العدد ،

(١) يجب الحفظ عن أن ننا حساب بينو . انظر Formulaire de Mathématiques, Vol. II, § a. وقد بحث هذا الموضوع من الناحية الرياضية في مجلة RdM Vols. VII and VIII ويرجع الموضوع أصلا إلى جيورج كانتور .

معرفين العلاقة المتعدية بأنها : أي قوة لعلاقة الواحد بالواحد . وهذا التعريف لا يصلح الآن ما دمنا سنستبعد الأعداد . ومن مفاخر الرياضة الحديثة أنها استطاعت الملاءمة بين مبدأ قديم وبين مطالب هذه الحالة .

والتعريف المطلوب علينا أن نحصل عليه بالاستنباط الرياضي . فالمبدأ الذي كان يعتبر عادة مجرد حجة لتوضيح نتائج لا سبيل إلى البرهنة عليها بأي دليل آخر ، أصبح الآن أوثق فحصا . فبين الآن أنه المبدأ الذي يعتمد عليه قانون التبادل وإحدى صور قانون التوزيع[١] . وذلك بمقدار ما يتصل بالأعداد الترتيبية . وهذا المبدأ الذي يفسح للمتناهي أوسع مدى ممكن ، هو العلامة المميزة للمتواليات . ويمكن تقريره على النحو الآتي :

إذا علم أي فصل من حدود هـ الذي ينتمي إليه الحد الأول من أية متوالية والذي ينتمي إليه حد المتوالية التالي بعد next after أي حد من المتوالية المنتمية لـ هـ ، إذن كل حد من المتوالية ينتمي لـ هـ .

ويمكن صياغة المبدأ عينه في صورة أخرى . ليكن ﻫ (س) دالة قضية تصبح قضية محدودة متى علمت س ، إذن ﻫ (س) دالة س ، وتكون بوجه عام صادقة أو كاذبة بحسب قيمة س . فإذا كان س عضوا في متوالية ، فليكن س دالاً على ما بعد س . وليكن ﻫ (س) صادقا حين يكون س أول حد في متوالية معينة ، وليكن ﻫ (عقب س) صادقا كلما كان ﻫ (س) صادقا ، حيث س أي حد في المتوالية . فيترتب على ذلك بمبدأ الاستنباط الرياضي أن ﻫ (س) صادق دائما ، إذا كان س أي حد في المتوالية المذكورة .

والتعريف الكامل للمتوالية هو ما يأتي : ليكن ع أي علاقة واحد بواحد لا متماثلة ، ى فصل بحيث يكون لكل حد من ى العلاقة ع لحد ما ينتمي كذلك للفصل ى . وليكن هناك على الأقل حد واحد من الفصل ى ليس له العلاقة ع لأي حد من ى . وليكن هـ أي فصل ينتمي له على الأقل أحد حدود ى ، وينتمي له كذلك كل حد من ى له العلاقة ع لحد ما ينتمي لكلا هـ ، ى . وليكن ى بحيث

(١) هذه الصورة هي : $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ والصورة الأخرى وهي $(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$ تصح كذلك في الأعداد الترتيبية اللانهائية ، فتكون بذلك مستقلة عن الاستنباط الرياضي .

يكون داخلا تماماً تحت أي فصل هو يحقق الشروط السابقة . إذن ى ، مرتبا هذا الترتيب بالعلاقة ع ، فهو متوالية[١] .

٢٣٠ — ويمكن إثبات أن كل شيء عن هذه المتواليات له صلة بالحساب المتناهي . فنبين أولا أنه لا يمكن وجود إلا حد واحد من ى ليس له العلاقة ع بأي حد من ى . ثم نعرف بعد ذلك الحد الذي له العلاقة ع مع س بأنه التالي لـ س (من حيث أن س هي ى) والذي يكتب أنه عقب س . وبذلك يمكن بسهولة أن تعلم التعريفات وخصائص الجمع والطرح والضرب والقسمة . والحدود الموجبة والسالبة ، والكسور المنطقة rational fractions . ويسهل بيان أنه بين أي كسرين منطقين كسر ثالث دائما . ومن هذه النقطة يسهل التقدم إلى اللامنطقات والأعداد الحقيقية real .

وبصرف النظر عن مبدأ الاستنباط الرياضي ، فإ يهمنا تماماً عن هذه العملية أنها تبين أن الخواص الوحيدة المتسلسلة أو الترتيبية للأعداد المتناهية مستخدمة في الرياضيات العادية . وهي الخواص التي يمكن تسميتها بالخواص المنطقية الخارجة تماماً عن الموضوع . وأعني بالخواص المنطقية للأعداد تعريفها بأفكار منطقية بحتة . هذه العملية التي وصفناها في الجزء الثاني يمكن أن نقدم لها هنا موجزا مختصرا . فنقول : يتبين أولا أن علاقة الواحد بالواحد يمكن أن تقوم بين أي فصلين صفر ، أو بين أي فصلين ى ، ف وهنا بحيث إذا كان س هو ى ، س يختلف عن س ، فإن س لا يمكن أن يكون ى . والأمر كذلك في ف . وإمكان مثل هذا الترابط بين الواحد بالواحد هو الذي نسميه تشابه فصلين ى ، ف . والتشابه similarity من جهة أنه متماثل ومتعد يجب أن يكون قابلا للتحليل (بمبدأ التجريد) إلى حصوله على خاصية مشتركة . وهي التي نعرفها بأنها عدد أي فصل من الفصلين . وحين يكون للفصلين ى ، ف الخاصية المذكورة فإنا نقول إن عددهما واحد ، وكذلك في الأعداد الأعلى . والتعريف العام للأعداد المتناهية يتطلب

---

(١) ينبغي ملاحظة أن المتسلسلة المعرفة هكذا [illegible] رأينا في الباب [illegible] علاقة واحد بواحد لا متناهية [illegible] المتسلسلة غير متناهية أو [illegible]

(٢) انظر مقالتي عن منطق العلاقات في مجلة RdM, VII

الاستنباط الرياضي ، أو لا تشابه الكل والجزء ، ولكنه يعطى دائماً صيغة منطقية بحتة .
والأعداد معرفةً على هذا النحو هي التي نستخدم في الحياة اليومية ، وهي الجوهرية في أي قول عن الأعداد . وأن يكون للأعداد هذه الخواص المنطقية هو مصدر أهميتها . ولكن الحساب العادي لا يستخدم هذه الخواص التي يمكن أن تعرى الأعداد عنها دون أي مساس بصدق الحساب والتحليل . فالمطلوب في الرياضة إنما هو أن الأعداد المتناهية تكوّن متوالية . وهذا هو السبب في أن الرياضيين — مثل هلمهولتز وديديكند وكرونكر — قد ذهبوا إلى أن الأعداد الترتيبية متقدمة على الأصلية cardinals ؛ لأن الخواص الترتيبية للأعداد هي وحدها الداخلة في الموضوع . ولكن النتيجة القائلة بأن الترتيبيات متقدمة على الأصليات يبدو أنها نشأت من خلط . ذلك أن الترتيبات والأصليات هما على حد سواء متوالية ؛ ولهما بالضبط عين الخواص الترتيبية . ويمكن إثبات جميع الحساب ابتداءً من أي منهما دون رجوع للآخر ؛ من حيث أن قضاياهما متطابقة رمزيا ، ولكن مختلفة في المعنى . ولكي نثبت أن الترتيبيات متقدمة على الأصليات ، لا بد من بيان أن الأصليات إنما يمكن تعريفها بصيغة الترتيبيات . وهذا باطل لأن التعريف المنطقي للأصليات مستقل تماماً عن الترتيبيات[1] . ويبدو في الحقيقة أنه لا وجه في الاختيار فيما يختص بالتقدم المنطقي بين الترتيبيات والأصليات ، سوى أن وجود الترتيبيات مستنبط من متسلسلة الأصليات . وكما سنرى في الفقرة التالية يمكن تعريف الترتيبيات دون رجوع إلى الأصليات ، ولكنها حين تعرف يتضح أنها تستلزم الأصليات . وبالمثل يمكن تعريف الأصليات دون الرجوع إلى الترتيبيات ، ولكنها في جوهرها تكوّن متوالية ؛ وجميع المتواليات كما سنبين فيما بعد تستلزم بالضرورة الترتيبيات .

٢٣١ — لم نستطع حتى الآن تحليل الترتيبيات تحليلا صحيحا ؛ بسبب التحيز الشائع ضد العلاقات . فالناس يتحدثون عن المتسلسلة باعتبار أنها تشتمل على حدود معينة مأخوذةً في ترتيب معين ، وتنطوي هذه الفكرة بوجه عام على عنصر نفساني . فجميع المجموعات من الحدود لها بصرف النظر عن الاعتبارات النفسانية كل ضروب من الترتيب هي قادرة عليه ؛ أي أن لها علاقات متسلسلة ذات مجالات هي منظومة معطاة من الحدود؛ وهذه العلاقات تنظم تلك الحدود في أي ترتيب ممكن

(١) لقد اعترف الأستاذ بيانو الذي كان معصوما بشكل نادر عن الخطأ بهذه الحقيقة . انظر Formulaire, 1898, note (p. 39).

وفي بعض الأحوال تكون علاقة " متسلسلة " أو أكثر هي الغالبة بوجه خاص ، إما بسبب بساطتها أو أهميتها . مثال ذلك أن ترتيب المقدار بين الأعداد ، أو ترتيب القبل والبعد بين اللحظات ، يظهر أنه يكاد يكون الترتيب « الطبيعي » ، وأن أي ترتيب آخر يبدو أنه يقحم صناعيا بمحض إرادتنا . وهذا خطأ محض ؛ لأنه لا يمكن أن نهب الحدود ترتيبا ليس لها من قبل . والأمر النفساني هو « اعتبار » هذا الترتيب أو ذاك . فنحن حين نقول إننا نرتب منظومة من الحدود في أي ترتيب شئنا ، فالذي نعنيه في الواقع أننا نستطيع اعتبار أي علاقات متسلسلة للمنظومة المعطاة مجالها . وأن هذه العلاقات المتسلسلة ستعطي فيما بينها توافيق من القبل والبعد متفقة مع التعدي والارتباط . ويترتب على ذلك أن الترتيب إذا شئنا الدقة في التعبير ليس خاصة لمنظومة معلومة من الحدود ، بل لعلاقة متسلسلة مجالها هو المنظومة المعطاة . فإذا أعطيت العلاقة أعطيت معها مجالها ، ولكن إذا أعطى المجال فلا تعطى العلاقة بأي حال . وفكرة منظومة من الحدود في ترتيب معلوم ، هي فكرة منظومة من الحدود معتبرة على أنها مجال علاقة متسلسلة معطاة . ولكن اعتبار الحدود أمر زائد عن الحاجة ، ويكفي جداً اعتبار العلاقة وحدها .

يمكن إذن أن نعتبر العدد الترتيبي خاصة " مشتركة لمنظومات من العلاقات المتسلسلة التي تولد ترتيبا متسلسلات متشابهة . ومثل هذه العلاقات هي التي سميناها « الشبيه » likeness ، أي إذا كان ق ، ك هما مثل هاتين العلاقتين فإن مجاليهما يمكن أن يترابطا حدا بحد ، إلى درجة أن حدين بين أولهما علاقة ق مع ثانيهما ، سيرتبطان مع حدين للأول منهما علاقة ك مع الثاني ، والعكس بالعكس . وهنا ، كما في حالة الأعداد الأصلية : يمكن بمقتضى مبدأ التجريد أن نعرف العدد الترتيبي لعلاقة متسلسلة متناهية معطاة ، بأنه فصل مثل هذه العلاقات . ومن السهل بيان أن العلاقات المولدة للمتواليات متشابهة جميعا . وفصل مثل هذه العلاقات سيكون العدد الترتيبي للأعداد الصحيحة المتناهية في ترتيب المقدار . وعندما يكون الفصل متناهيا فجميع المتسلسلات التي يمكن أن تتكون من حدود متشابهة ترتيبيا ، ومختلفة ترتيبيا عن متسلسلات لها عدد أصلي من الحدود مختلف ! ومن ثم فهناك ما يربط واحد بواحد للترتيبات والأحسبات المتناهية ، وليس

لها مثيل بالنسبة للأعداد اللامتناهية ، كما سنرى في الجزء الخامس . نستطيع إذن تعريف العدد الترتيبي ن بأنه فصل العلاقات المتسلسلة التي تشتمل ميادينها domains على ن من الحدود ، حيث ن عدد أصلي متناه . ومن الضروري أن نتخذ هنا الميادين بدلا من المجالات fields ، إلا إذا استبعدنا العدد ١ ، إذ لا علاقة تستلزم التعدد يمكن أن يكون لها حد واحد في مجالها . على الرغم من أنها يمكن ألا يكون لها أي حد ، ولهذا مضايقة عملية بسبب أن ن + ١ لا بد من الحصول عليها بإضافة حد « واحد » إلى الميدان . والنقطة التي أثرناها تشمل الاصطلاحات والرموز على حد سواء ، وليس لها أي أهمية فلسفية .

٢٣٢ ــ التعريف المذكور سابقا للأعداد الترتيبية مباشر وبسيط . ولكنه لا يعطي فكرة النونية المعتبرة في العادة أنها هي العدد الترتيبي . وهذه الفكرة أشد تعقيدا : فأي حد ليس في حد ذاته العدد النوني ، ولا يصبح كذلك بمجرد تخصيص ن ــ ١ لحدود أخرى . بل الحد هو النوني بسبب علاقة متسلسلة معينة ؛ وهذا هو تعريف العدد النوني ؛ وهو يبين أن هذه الفكرة نسبية ليس فقط بالنسبة لسابقاتها بل لعلاقة متسلسلة متخصصة كذلك . ويمكن بالاستنباط تعريف الترتيبيات المتناهية المختلفة دون ذكر الأصليات . والعلاقة المتسلسلة المتناهية هي علاقة لا تشبه (بالمعنى المذكور سابقا) أي علاقة تستلزمها ، ولكنها لا تكافئها . والعدد الترتيبي المتناهي هو عدد يشتمل على علاقات متسلسلة متناهية . فإذا كان ن عدداً ترتيبيا متناهيا ، كان ن + ١ عدداً ترتيبيا ، بحيث أنه إذا حذف الحد الأخير(١) من متسلسلة من الصنف ن + ١ ، كان الباقي في نفس الترتيب من صنف ن . وبلغة أكثر دقة ، العلاقة المتسلسلة من الصنف ن + ١ هي علاقة حين تقتصر على ميدانها لا على مجالها تصبح من الصنف ن . وهذا يعطي بالاستنباط تعريف كل عدد ترتيبي متناه خاص دون أن نذكر فيه الأصليات أبدا . وهكذا لا يمكن القول إن الترتيبيات تفترض في أساسها الأصليات ، ولو أنها أكثر تعقيدا ، ما دامت تفترض كلا من علاقة التواحد بالواحد والعلاقة المتسلسلة . على حين أن الأصليات

---

(١) الحد الأخير من متسلسلة (إن وجد) هو الحد الذي ينتمي لعكس الميدان ، ولكن لا ينتمي للميدان ؛ والحد الأول هو الحد الذي يكون بعده لا قبله الحدود الأخرى .

لا تفرض إلا علاقة الواحد بالواحد .

ويمكن إعطاء عدة تعريفات مكافئة لذلك العدد الترتيبي الخاص بالترتيبات المتناهية فى ترتيب المقدار . ومن أبسط التعاريف أن هذا العدد ينتمي لأى علاقة متسلسلة ، هي بحيث أن أى فصل يحتويه مجالها ولا يكون صفراً ، فله حد أول ، على حين أن كل حد من المتسلسلة له تال مباشر ، وكل حد ما عدا الأول له سابق مباشر . ومرة ثانية الأعداد الأصلية ليست هنا مفروضة من قبل بأي حال .

وقد أخذنا العلاقات المتسلسلة خلال المناقشات السابقة على أنها متعدية لا علاقات واحد بواحد . لأن علاقات الواحد بالواحد يسهل أن تشتق من العلاقات المتعدية ، بينما الاشتقاقات العكسية معقدة بعض الشيء . وعلاوة على ذلك فإن علاقات الواحد بالواحد لا تصلح إلا لتعريف المتسلسلات المتناهية . وبذلك لا يمكن أن يشمل استخدامها بحث المتسلسلات اللانهائية ، إلا إذا أخذت على أنها مشتقة من المتعديات .

٢٣٣ – ولعل هذا موضع ذكر بعض كلمات عن الترتيبات الموجبة والسالبة . إذا حذفت الحدود الأولى التى عددها ن من متوالية (حيث ن أى عدد متناه) فلا يزال الباقى يكوّن متوالية . وبالنسبة للمتوالية الجديدة فقد يمكن أن تعين الترتيبات السالبة للحدود المحذوفة . ولكن من المناسب لهذا الغرض اعتبار بداية المتوالية الأصغر على أنها الحد الصفرى (أى الحد الذى ترتيبه الصفر) . ولكى نحصل على متسلسلة تعطى أى عدد ترتيبي موجب أو سالب ، نحتاج إلى ما يمكن أن نسميه بالمتوالية المزدوجة double progression . والمتوالية المزدوجة متسلسلة من شأنها أننا إذا اخترنا منها أى حد س ، نشأ عن هذا الحد متواليتان ، إحداهما متولدة من العلاقة المتسلسلة ع ، والأخرى من ع̆ . وسنعين لـ س العدد الترتيبي ٠ ، وسنعين للحدود الأخرى أعداداً ترتيبية موجبة أو سالبة بحسب انتماء أى منهما لأى واحدة من المتواليتين الناشئتين من س أما الترتيبات الموجبة والسالبة ذاتها فإنها تكون مثل هذه المتوالية المزدوجة . وهى تعبر أساساً عن علاقة بالأصل المختار تحكمياً من المتواليتين ، ويعبر + ن ، – ن عن علاقتين متعاكستين بالتبادل . وبذلك يكون لهما جميع الخواص التى رأينا فى الباب السابع والعشرين أنها تميز الحدود ذات العلامات .

الباب الثلاثون

نظرية ديديكند عن العدد

٢٣٤ — ترجع أساساً نظرية المتواليات والترتيبات التي بحثناها في الباب السابق إلى رجلين هما ديديكند وكانتور . ولما كانت مساهمات كانتور تختص بوجه خاص باللانهاية فلا حاجة بنا إلى بحثها في الوقت الحاضر ؛ وكذلك نؤجل البحث في نظرية ديديكند عن اللامنطقات . أما نظريته عن الأعداد الصحيحة فهي التي نود الآن بحثها . وهي النظرية المبسوطة في كتابه Was sind und was sollen die zahlen[1] ولن أتقيد عند عرضي لهذا الكتاب بعبارات ديديكند بالضبط ، إذ يبدو أنه في الوقت الذي كتب فيه مؤلفه لم يكن على علم بالمنطق الرمزي . ومع أنه اخترع الشيء الكثير من هذا الموضوع مما يدخل في صميم غرضه ، إلا أنه كان من الطبيعي أن يصطنع عبارات غير مألوفة ، ولم تكن دائماً مناسبة تماماً مثيلاتها المصطلح عليها .

وهذه هي الأفكار الأساسية في الكتاب المذكور[2] : — ١ — تمثيل abbildung النظام (٢١) ؛ — ٢ — فكرة السلسلة chain (٣٧) ؛ — ٣ — سلسلة عنصر (٤٤) — ٤ — الصورة المعممة للاستنباط الرياضي (٥٩) ؛ — ٥ — تعريف النظام اللانهائي المفرد (٧١) . ويستنبط ديديكند من هذه الأفكار الخمسة الأعداد والحساب العادي . ولنشرع أولاً في تفسير هذه الأفكار ثم نفحص عن الاستنتاج .

٢٣٥ — (١) إن تمثيل فصل مّا ى هو قانون به يكون لكل حد من حدود ى وليكن س مثلاً ، حد واحد لا غير مناظر (سَ) . ولا نفترض في هذا أولاً أن (سَ) تتبع الفصل ى ، أو أن (سَ) قد تكون عين (صَ) إذا كان س ، ص حدين مختلفين من حدود ى . وبهذا يمكن أن يصاغ التعريف على النحو الآتي :

---

(١) الطبعة الثانية برنشفيك ١٨٩٣ (الطبعة الأولى ١٨٨٨) وعرضت هذا الكتاب المعبر عنه بغير العلامات موجود في مقالتي في مجلة R.d.M. VII, 4. 3.

(٢) الأرقام الموجودة بين قوسين لا تشير إلى الصفحات بل إلى الفقرات المقسم الكتاب إليها .

إن تمثيل representation فصل ى هو علاقة كثير بواحد يشتمل ميدانه على ى الذى حدوده قد تنتمي أو لا تنتمي إلى ى ، ويترابط كل حد من حدوده بحدود ى [1] . ويكون التمثيل متشابهاً إذا كان س يختلف عن س‍ ، وكلاهما ينتمي إلى ى ، عندئذ ط (س) يختلف عن ط (س‍) ؛ أى عندما تكون العلاقة المذكورة علاقة واحد بواحد . وديديكند يبين أن التشابه بين الفصول منعكس ومتماثل ومتعد . ويلاحظ (٣٤) أن الفصول يمكن تصنيفها بالتشابه مع فصل معلوم — وهذا إيحاء بفكرة أساسية فى مباحث كانتور .

٢٣٦ — (٢) إذا وجدت علاقة ، سواء أكانت علاقة واحد بواحد أم كثير بواحد ، لا ترتبط مع الفصل ى إلا بحدود تنتمي إلى ذلك الفصل ، فإن هذه العلاقة يقال عنها إنها تكون تمثيلا ل‍ ى فى ذاته (٣٦) . وبالنسبة لهذه العلاقة يسمى ى سلسلة (٣٧) بعبارة أخرى أى فصل ى فهو سلسلة بالنسبة لأى علاقة كثير بواحد إذا كان ى داخلا فى ميدان العلاقة ، وأن المترابط مع ى هو دائماً ى ذاته . ومجموع مترابطات correlates فصل يسمى « صورة » Bild الفصل . وهكذا فإن السلسلة هى فصل صورته جزء أو كل نفسه . ولفائدة القارئ غير الرياضى يحسن ملاحظة أن السلسلة بالنسبة لعلاقة واحد بواحد لا يمكن أن تكون متناهية بشرط أن يكون بها أى حد لا ينتمي إلى صورة السلسلة ، لأن مثل هذه السلسلة يجب أن تشتمل على نفس عدد الحدود كجزء صحيح proper part من ذاتها [2] .

٢٣٧ — (٣) إذا كان ا أى حد أو أى مجموعة من الحدود . فقد يكون هناك بالنسبة لعلاقة كثير بواحد معلومة سلاسل كثيرة تشتمل على ا . والجزء المشترك بين جميع هذه السلاسل ، والذى يدل عليه قولنا ا ، هو ما يسميه ديديكند سلسلة ا (٤٤) . مثال ذلك إذا كان ا هو العدد ن ، أو أى منظومة من الأعداد

---

(١) علاقة كثير بواحد هى علاقة نسبية بعلاقة كمية بعضها ، وهذه العلاقة ب‍ الحد الأيمن الذى تنتهي إليه العلاقة ، لا يتحدد إلا بحد يعطى الحد الأيسر . أما العكس فصحيح فأمر تركه ميسر لى يتفصل فيه . وهكذا علاقة واحد بواحد هى حالة خاصة من علاقة كثير بواحد .

(٢) قوله جزء صحيح عبارة تشبه قولنا كسر صحيح Proper fraction ، Echtes Theil ويدل على الجزء لا الكل .

ن أقلها . كانت سلسلة ا بالنسبة للعلاقة أصغر من ٥ ٢ هي جميع الأعداد التي لا تقل عن ٥ .

٢٣٨ — (٤) ثم يشرع ديديكند (٥٩) في بسط نظرية هي صورة معممة للاستنباط الرياضي . وتجرى النظرية على النحو التالي : ليكن ا أي حد أو أي منظومة من الحدود يشتمل عليها اتصال س . ولتكن صورة الجزء المشترك بين س وبين السلسلة ا يحتويها أيضاً س . فيترتب على ذلك أن السلسلة ا يحتويها س . هذه النظرية المعقدة بعض الشيء يمكن أن تصبح أوضح إذا صيغت بعبارة أخرى . فلنسم العلاقة التي تتولد السلسلة عنها (أو الأولى عكس هذه العلاقة) تتابعاً ، بحيث يكون المرابط أو الصورة هو التالي للحد . وليكن ا حداً له تال أو مجموعة من مثل هذه الحدود . فالسلسلة بوجه عام (بالنسبة للتالي) ستكون أي منظومة من الحدود بحيث ينتمي تالي أي حد منها لمنظومة . وستكون سلسلة ا الحد المشترك لجميع السلاسل المشتملة على ا . ولكن منطوق النظرية يخبرنا أن ا متضمنة في س ، فإذا كان أي حد من سلسلة ا هو س ؛ فكذلك تاليه . والنتيجة هي أن كل حد في السلسلة ا هو س . هذه النظرية كما هو واضح شبيهة جداً بالاستنباط الرياضي . ولكنها تختلف عنه أولا بأن ا ليس من الضروري أن يكون حداً مفرداً ، وثانياً بأن العلاقة المكونة لا يجب أن تكون علاقة واحد بواحد . بل قد تكون علاقة كثير بواحد . ومما هو جدير بالاعتبار حقاً أن فروض ديديكند السابقة تكفي للبرهنة على هذه النظرية .

٢٣٩ — (٥) وأنتقل إلى تعريف النظام اللانهائي المفرد أو المتصل (٧١) . فهو يعرفه بأنه فصل يمكن أن يمثل في ذاته بواسطة علاقة واحد بواحد ، ثم يمتد بحيث يصبح سلسلة لحد مفرد من الفصل لا تشتمل عليه صورة الفصل ، وذلك بالنسبة للعلاقة الواحد بالواحد المذكورة . فإذا سمينا الفصل ل ، وعلاقة الواحد بالواحد ع ، نشأ عن ذلك فيما يلاحظ ديديكند أربع نقط في هذا التعريف . (١) صورة ل متضمنة في ل ؛ أي كل حد له العلاقة ع مع ل فهو ل (٢) ل سلسلة حد من حدوده (٣) هذا الحد الواحد هو بحيث أنه لا ل له العلاقة ع معه ، وبعبارة أخرى ليس صورة أي حد آخر من ل (٤) العلاقة ع هي علاقة واحد بواحد ،

وبعبارة أخرى التبيل متشابه similar . والنظام المجرد معرفاً بأنه حاصل على هذه الخواص . يعرفه ديديكند بأنه الأعداد الترتيبية (٧٣) . ومن الواضح أن نظامه اللانهائي المفرد هو نفسه ما سماه « متوالية » . وهو يشرع في استنتاج الخواص المتعددة للمتواليات . وبوجه خاص بالاستنباط الرياضي (٨٠) مما ينشأ عن الصورة المعممة المذكورة . فالعدد م يقال إنه أصغر من عدد آخر ن ، إذا كانت سلسلة ن داخلة في صورة سلسلة م (٨٩) ، وكما يتبين في القضيتين (٨٨ ، ٩٠) أنه إذا وجد عددان مختلفان فأحدهما يجب أن يكون أصغر من الآخر . ومن هذه النقطة يسير كل شيء بساطة .

٢٤٠ . أهم النقط الباقية التي تبدو ذات أهمية بالنسبة لغرضنا هي تعريف الأعداد الأصلية . فهو يبين (١٣٢) أن جميع الأنظمة اللانهائية المفردة تتشابه فيما بينها وتشبه الترتيبات ، وبالعكس (١٣٣) أن نظام شبيه بنظام لا نهائي مفرد فهو لا نهائي مفرد . وإذا كان النظام متناهياً ، فهو شبيه بنظام نرمز له بقولنا ى ن ، حيث ى ن تعني جميع الأعداد من ١ إلى ن بما فيها ١ ، ن ، وبالعكس بالعكس (١٦٠) . ولا يوجد إلا عدد واحد ن له هذه الخاصية بالنسبة لأي نظام متناه معلوم ، فإذا اعتبرناه في علاقته بهذه الخاصية يسمى « عدداً أصلياً cardinal number » ويقال إنه عدد العناصر التي يتألف منها النظام المذكور (١٦١) . وأخيراً نصل إلى الأعداد الأصلية . واعتمادها على الترتيبية بحسب تفسيري لرأى ديديكند هو كالآتي : بسبب ترتيب الترتيبيات فكل عدد ترتيبي ن يعرّف فصلا من الترتيبيات ى ن وتشتمل على كل ما لا يتلوه . ويمكن تعريفها بأنها جميع ما لا تشتمل عليه صورة سلسلة ن . هذا الفصل من الأعداد الترتيبية قد يكون شبيهاً بفصل آخر يقال عنه حينئذ إن له العدد الأصلي ن . وإنما كان كل واحد منها يعرّف فصلا بسبب ترتيب الأعداد الترتيبية ، ولهذا كان هذا الترتيب مفروضاً من قبل في الحصول على الأصليات .

٢٤١ — ولست بحاجة إلى التنويه بمزايا الاستنباط السالف الذكر فهي مزايا معترف بها من الجميع . غير أن ثمة بعض النقاط تحتاج إلى مناقشة . فمن جهة يبرهن ديديكند على الاستنباط الرياضي ، على حين يعتبره بيانو بديهية ، مما يجعل لديديكند

اعتباراً ظاهرياً يحتاج منا إلى فحص . ومن جهة أخرى ليس ثمة ما يدعو إلى القول بأن الأعداد ترتيبية بمجرد أن الأعداد التي يحصل ديديكند عليها « لها » ترتيب . ومن جهة ثالثة تعريفه للأصليات معقد بما لا ضرورة له . كما أن اعتماد الأصليات على الترتيب إنما هو اعتماد ظاهري . وسأتكلم عن كل نقطة من هذه النقط على التوالي .

أما فيما يختص ببرهان الاستنباط الرياضي فينبغي ملاحظة أن هذا البرهان يكافئ الفرض العملي من أن الأعداد تكون سلسلة تبدأ من واحد منها . ويمكن استنباط أي واحدة من الأخرى . أما القول بأن أيهما بديهية وأيهما نظرية فاختيار ذلك موكول إلى الذوق الشخصي . على الجملة ولو أن البحث في السلاسل يحتاج إلى كثير من البراعة فهو أمر صعب بعض الشيء ، ومن ممارسته أن النظريات المتعلقة بالفصل المتناهي من الأعداد التي ليست أكبر من ٥ هي كفاعدة يجب أن تستنبط من نظريات مناظرة متعلقة بالفصل اللامتناهي من الأعداد التي هي أكبر من ٥ . ولهذه الأسباب لا بسبب أي امتياز منطقي يبدو من الأسهل البدء بالاستنباط الرياضي . هذا وينبغي ملاحظة أنه في طريقة بيانو إنما نحتاج إلى الاستنباط الرياضي حين نريد البرهنة على نظريات تتعلق بأي عدد . ثم إن الحساب الابتدائي الذي كنا نتعلمه في طفولتنا ، والذي إنما يبحث في الأعداد الخاصة ، مستقل تماماً عن الاستنباط الرياضي . ولو أننا حين نريد إثبات صحة ذلك بالنسبة لكل عدد خاص لاحتجنا إلى الاستنباط الرياضي . ومن جهة أخرى القضايا المتعلقة بالأعداد الخاصة في طريقة ديديكند تحتاج كالقضايا العامة إلى بحث السلاسل . وبذلك نجد في طريقة بيانو مزية متميزة من البساطة ، وفصلاً أوضح بين قضايا الحساب العامة والخاصة . ولكن من وجهة النظر المنطقية البحتة يبدو أن الطريقتين صحيحتان على السواء . هذا وعلينا أن نتذكر أن كلاً من بديهيات بيانو وديديكند تصبح في ضوء النظرية المنطقية للأعداد الأصلية قابلة للبرهنة(١).

٢٤٢ ــ أما عن النقطة الثانية فهنالك نقص في وضوح ما يقوله ديديكند . وإليك نص كلامه (٧٣) : « إذا كنا عند تأمل نظام لا متناه مفرد ٥ يقوم

---

(١) انظر الباب الثالث عشر .

ترتيب على تمثيل ω ، تطرح تماماً الطبيعة الخاصة لعناصر مع استبقاء إمكان تمييزها فقط ، ولا نبحث إلا في العلاقات التي بها توضع بترتيب تمثيل ω ؛ حينئذ نسمي هذه العناصر «أعداداً طبيعية» أو «أعداداً ترتيبية» ، أو «أعداداً فقط» .

ومن المستحيل أن يكون هذا القول صحيحاً تماماً ؛ إذ أنه يستلزم أن حدود جميع المتواليات ما عدا الترتيبات مركبة ، وأن الترتيبات عناصر في جميع مثل هذه الحدود نحصل عليها بالتجريد . ومن الواضح أن الأمر ليس على هذا النحو ، إذ يمكن تكوين متوالية من نقط أو لحظات أو من أعداد ترتيبية لا نهائية ، أو من أعداد أصلية ليست الترتيبات عناصرها ، كما سنرى عما قريب . وعلاوة على ذلك من المستحيل ألا تكون الترتيبات - كما يذهب إلى ذلك ديدبكند - سوى حدود العلاقات التي تكوّن متوالية . وإذا وجب أن تكون الترتيبات شيئاً مّا على الإطلاق فلابد أن تكون في ذاتها شيء مّا ، ولابد أن تفترق عن غيرها من الأمور كما تفترق النقط من اللحظات ، أو الألوان عن الأصوات . ولعل ما كان ديدبكند يقصده بالبيان هو التعريف بمبدأ التجريد ، مما حاولنا إعطاؤه في الباب السابق . ولكن التعريف المصاغ على هذا النحو يدل دائماً على فصل من الأشياء لها (أو هي) طبيعة حقيقية بذاتها ، ولا تعتمد منطقياً على الطريقة التي عرفت بها . فالأشياء المعرّفة يجب أن تكون مرئية على الأقل لعين العقل . أما ما يقرره المبدأ فهو أنه في ظل ظروف معينة توجد مثل تلك الأشياء بشرط أن نعرف كيف نبحث عنها ، حتى إذا وجدناها أتكون ترتيبية أو أصلية أو شيئاً مختلفاً تمام الاختلاف فأمر لا يمكن تقريره ابتداء . مهما يكن من شيء لا يوضح لنا ديدبكند ما الذي تشترك فيه جميع المتواليات ، ولا يقدم أي سبب لافتراض أن هذا الشيء المشترك هو الأعداد الترتيبية ، فيما عدا أن جميع المتواليات تخضع لنفس القوانين التي تخضع الترتيبات لها مما يدل على حد سواء أن أي متوالية معلومة هي ما تشترك فيه جميع المتواليات .

٢٤٣ - وبهذا ننتقل إلى النقطة الثالثة ، وهي تعريف الأعداد الأصلية بواسطة الترتيبية . يلاحظ ديدبكند في مقدمته أن كثيراً من الناس لن يتعرفوا على الأعداد الطبيعية المألوفة لديهم من زمن طويل في ظل الأشكال المبهمة التي يقدمها

إليهم . ويبدو لي في هذا المضمار أن هؤلاء الناس ، وأنا معهم ، على حق . فالذي يقدمه ديديكند لنا ليس الأعداد بل أى متوالية : فما يقوله يصدق على جميع المتواليات على حد سواء . ولا تتطلب براهينه – حتى حين يبحث في الأعداد الأصلية – أى خاصية تميز الأعداد عن غيرها من المتواليات . ولم ينصب أى دليل يبين أن الأعداد أسبق من غيرها من المتواليات . حقاً إنه يخبرنا أنها ما تشترك فيه جميع المتواليات . ولكن ليس ثمة أى سبب للظن أن للمتواليات أى شيء مشترك أكثر من الخواص المعينة في التعريف ، وهذه لا تكوّن بذاتها متوالية جديدة . الواقع كل شيء يعتمد على علاقات الواحد بالواحد التي ظل ديديكند يستخدمها دون أن يلحظ أنها وحدها كافية في تعريف الأصليات . ذلك أن علاقة التشابه بين الفصول وهي العلاقة التي يستخدمها عن وعي ، بالإضافة إلى مبدأ التجريد الذي يفترضه ضمناً كافيان في تعريف الأصليات . ولكنهما لا يكفيان في تعريف الترتيبيات ، إذ نحتاج كما رأينا في الباب السابق إلى علاقة الشبه likeness بين العلاقات المتسلسلة المحكمة الترتيب . وتعريف الأعداد الترتيبية المتناهية الخاصة يتم صراحة في صيغة من الأعداد الأصلية المتناظرة : إذا كان ن عدداً أصلياً متناهياً ، كان العدد الترتيبي ن فصل العلاقات المتسلسلة التي لها ن من الحدود في ميدانها (أو في مجالها إذا آثرنا هذا التعريف) . ولكي نعرف مفهوم النونية نحتاج بجانب العدد الترتيبي ن إلى مفهوم قوى العلاقة ، أى حاصل الضرب النسبي لعلاقة مضروبة في نفسها عدداً متناهياً من المرات . فإذا كانت ع أى علاقة واحد بواحد متسلسلة ، وتولد متسلسلة متناهية أو متوالية ، فأول حد في مجال ع (وهو الحد الذي سنسميه ع) هو الحد الذي ينتمي إلى الميدان لا إلى عكس الميدان ، أى له العلاقة ع لا العلاقة ع̆ . فإذا كان عدد له ن من الحدود أو أكثر من ن ، حيث ن عدد متناه ، فالحد النوني أ ع هو الحد الذي له مع الحد الأول العلاقة عن-١ ، أو الحد الذي له العلاقة ع ن-١ ولكن ليس العلاقة ع̆ ن-١ . ولا مفر لنا من إدخال الأعداد الأصلية عن طريق فكرة قوى العلاقة . ولما كانت القوى تعرف بالاستنباط الرياضي فإن فكرة النونية تبعاً للتعريف السابق لا يمكن أن تمتد إلى ما وراء الأعداد المتناهية . ومع ذلك يمكن أن نبسط الفكرة بالتعريف الآتي : إذا كانت ع علاقة متعدية غريبة aliorelative تولد متسلسلة محكمة الترتيب ن ، فالحد النوني

أي هو الحد س الذي يكون بحيث إذا كان س' هو العلاقة ث محدودة ب ح ب وسابقاتها ، كان إ س' العدد الترتيبي له . فنحن نجد هنا أن اعتماد الأصليات جاء من أن العدد الترتيبي له لا يمكن بوجه عام أن يعرف إلا بواسطة العدد الأصلي له .

ومن المهم ملاحظة أنه ليس لأي منظومة من الحدود بالطبع ترتيب معين أول من ترتيب آخر ، وأنه لا حد هو الحد النوني لمنظومة إلا إذا كان متعلقاً بعلاقة مولدة خاصة بجاها هو المنظومة أو جزء منها . مثال ذلك أنه ما دام في أي متوالية يمكن حذف أي عدد متناه من الحدود المتعاقبة بما فيها الحد الأول مع استمرار ما يبقى مكوّناً متوالية ، أمكن إنقاص العدد الترتيبي لحد في المتوالية لأي عدد أصغر نشاء . وبذلك يكون العدد الترتيبي لحد ما نسبياً مع المتسلسلة التي ينتمي إليها . ويمكن أن يرد هذا إلى علاقة مع الحد الأول من المتسلسلة . ولئلا يظن أننا ندخل في دور ، فيمكن تفسير ذلك بأن الحد « الأول » يمكن أن يعرف دائماً بطريقة غير عددية . وهو في نظام ديديكند اللامتناهي المفرد الحد الوحيد الذي لا تشتمل عليه الصورة في النظام . وبوجه عام في أي متسلسلة هو الحد الوحيد الذي له علاقة مكونة ذات جهة واحدة دون الجهة الأخرى (1) . وهكذا فإن العلاقة التي نعبر عنها بالنونية ليست فقط علاقة مع ن ، بل أيضاً علاقة مع الحد الأول من المتسلسلة . و « الأول » ذاته يتوقف على الحدود الداخلة في المتسلسلة ، وعلى العلاقة التي بها تترتب بحيث أن ما كان الأول قد يبطل أن يكون كذلك ، وما لم يكن الأول قد يصبح كذلك . وهكذا لابد من تعيين الحد الأول في المتسلسلة ، كما هو حاصل في رأي ديديكند عن المتوالية أنها متسلسلة حدها الأول . ومن ثم كانت العلاقة النونية تدل على علاقة رباعية : بين الحد الذي هو العلاقة النونية ، والحد المعين (الأول) ، وعلاقة مولدة متسلسلة ، والعدد الأصلي ن . وبذلك يتضح أن الترتيبات كانت فصولاً من قبيل العلاقات المتسلسلة المتشابهة ، أو أفكاراً كالعلاقات النونية . فهي أعقد من الأصليات . كما يتضح أن النظرية المتعلقة عن الأصليات مستقلة تماماً عن النظرية العامة عن المتواليات من حيث إنها تحتاج إلى تطور مستقل ليبين كيف

(1) ولو أنه من يكون متسلسلة [illegible]
بالأخير وطبيعة الأخير [illegible] عددية [illegible] الأول .

تكون الأصليات متوالية . وأن الترتيبيات عند ديديكند ليست بالضرورة إما ترتيبيات أو أصليات ، بل أعضاء في أي متوالية كانت . وقد أطنبت في بحث هذه النقطة لأهميتها ، ورأيي يختلف عن رأي معظم فضلاء الباحثين . ولو كان رأي ديديكند صواباً لكان من الخطأ المنطقي أن نبدأ كما هو الحال في هذا الكتاب بنظرية الأعداد الأصلية بدلا من الترتيب . والرأي عندي أن البدء بالترتيب ليس خطأ مطلقاً ، ما دامت خواص المتواليات ، بل معظم خواص المتسلسلات على العموم ، يظهر أنها مستقلة إلى حد كبير عن العدد . ولكن خواص العدد يجب أن تقبل البرهنة دون رجوع إلى الخواص العامة للمتواليات ما دامت الأعداد الأصلية يمكن أن نعرف تعريفاً مستقلا ؛ ويجب أن نبين أنها تكوّن متوالية قبل تطبيق النظريات الخاصة بالمتواليات عليها . ومن هنا كان السؤال عن الترتيب أو الأعداد بأيهما نبدأ أولا يرجع إلى المناسبة والبساطة . ومن هذه الوجهة من النظر يبدو من الطبيعي أن الأعداد الأصلية تسبق في بحثها المباحث الشديدة الوعورة الخاصة بالمتسلسلات والتي شغلتنا خلال هذا الجزء .

الباب الواحد والثلاثون

المسافة

٢٤٤ ــ فكرة المسافة من الأفكار المفروض فى الغالب أنها جوهرية فى المتسلسلات[1] ولكنها يصعب أن تقبل تعريفاً مضبوطاً . وتأكيد القول فى المسافة يميز بوجه عام أولئك الذين يعتقدون فى الوضع النسبى . فهذا ليبنتز يلاحظ وهو يناقش كلارك Clarke أن :

« فإن قيل : إن المكان والزمان كميتان ، أو الأولى أنهما شيئان يمتازان بالكمية ، وليس الأمر كذلك فى الوضع والترتيب .

قلتُ : للترتيب كذلك كميته . ففيه ما يأتى قبل ، وما يأتى بعد . فهناك مسافة أو فترة . وللأشياء النسبية كيفها كما للأشياء المطلقة . مثال ذلك أن النسبة والتناسب فى الرياضة لهما كيفهما ، واللوغاريتمات تقيسهما ، ومع ذلك فهما علاقات . ويترتب على ذلك أن الزمان والمكان ولو أنهما يقومان على علاقات إلا أن لهما كيفهما[2] » .

فى الفقرة السابقة عبارة : « ففيه ما يأتى قبل ، وما يأتى بعد . فهناك مسافة أو فترة » إذا أخذت على أنها قياس لم تنتج ؛ لأن مجرد الترتيب لا يدل على وجود مسافة أو فترة ، بل يدل كما رأينا على وجود امتدادات stretches ؛ وأن هذه الامتدادات قادرة على صورة خاصة من الجمع شديدة الشبه بما سميته الجمع العلاقى relational addition ، وأن لها علامة ، وأن الامتدادات (على الأقل نظرياً) التى تحقق بديهيات أرشميدس والبديهية الخطية linearity قابلة دائماً للقياس العددى . ولكن الفكرة كما نبه مينونج حق متميزة تماماً عن فكرة الامتداد . فسواء اشتملت أى متسلسلة خاصة على مسافات أو لم تشتمل ؛ فهى مسألة فى معظم المتسلسلات المتضمة compact (وهى التى يكون فيها حد بين أى حدين)

---

(١) انظر مثلا كتاب الأستاذ مينونج ، الفقرة ١٧ .

Phil. Werke, Gerhardt's ed. Vol. VII, p. 404.

لا تتقرر بالحجة . وفي المتسلسلات المنفصلة لابد من وجود مسافة ، وفي غيرها قد توجد المسافة – إلا إذا كانت متسلسلات نحصل عليها من متواليات كما نحصل على المنقطعات أو الأعداد الحقيقية من الأعداد الصحيحة . وفي هذه الحالة لابد من وجود مسافة . غير أننا سنجد أن الامتدادات كافية رياضياً ، وأن المسافات معقدة وغير مهمة .

٢٤٥ – ولنبدأ بقولنا إن تعريف المسافة ليس أمراً هيناً ، وكل ما عمل حتى الآن لتحقيق هذا الغرض يرجع الفضل فيه بوجه خاص إلى الهندسة غير الأقليدية[1] .

وكذلك سمي مينونج إلى وضع تعريف للمسافة . ولكن في كلتا الحالتين نجد العناية بالقياس العددي للمسافة أكثر من تعريفها الفعلي . ومع ذلك ليست المسافة بأي حال غير قابلة للتعريف . ولنحاول تعميم فكرتها ما أمكننا إلى ذلك سبيلا . أولا كل شيء ليس من الضروري أن تكون المسافة لا متماثلة . ولكن خواص المسافة الأخرى تسمح لنا دائماً أن نجعلها كذلك ، ولذا يمكن أن نأخذها على أنها لا متماثلة . وثانياً ليس من الضروري أن تكون المسافة كمية أو مقداراً ، ومع أنها تؤخذ عادة على أنها كذلك . إلا أننا سنرى أن هذا الأخذ بعيد عن خواصها الأخرى ، وبوجه خاص مع قياسها العددي . وثالثاً حين تؤخذ المسافة لا متماثلة فلابد من وجود حد واحد فقط له مع حد معلوم مسافة معلومة . ولابد أن تكون عكس العلاقة مع المسافة المعلومة مسافة من نفس النوع . (نلاحظ أنه يجب أولا تعريف « نوع » المسافة ، ثم نشرع من ذلك إلى التعريف العام للمسافة) وهكذا فإن كل مسافة فهي علاقة واحد بواحد ، وبالنسبة لكل هذه العلاقات يكون من المناسب أن نأخذ في الاعتبار عكس العلاقة على أنها قوتها الأولى . وبعد ذلك فحاصل الضرب النسبي لمسافتين من نوع واحد يجب أن يكون مسافة من نفس النوع . وإذا كانت المسافتان متعاكستين بالتبادل كان حاصل ضربهما تطابقاً ، وهو بذلك واحد في المسافات (الواقع أنه صفر) ، ويجب أن يكون الشيء الوحيد الذي ليس لا متماثلا . ثم إن حاصل ضرب مسافتين من نوع

---

(١) انظر مثلا Whitehead, Universal Algebra, Cambridge, 1898, Book VI, Chap. 1.

(٢) الرجع الملحق نفس المرجع .

واحد يجب أن يكون تبادلياً commutative [1] . فإذا كانت المسافات من نوع واحد مقادير ، فيجب أن تكوّن نوعاً من المقدار — مثلاً أي مسافتين يجب أن تكونا متساويتين أو غير متساويتين . فإذا لم تكن مقادير ، فيجب مع ذلك أن تكون متسلسلة متولدة بالطريق الثاني من الطرق الست ، يعني كل زوج من مسافتين مختلفتين لابد أن يكون له علاقة لا متماثلة معينة ، وهي نفس العلاقة لجميع الأزواج إلا فيما يختص بالجهة . وأخيراً إذا كانت ل هي هذه العلاقة ، وكانت ع$_1$ ل ع$_2$ (حيث ع$_1$ ، ع$_2$ مسافتان من نوع واحد) وإذا كانت ع$_3$ أي مسافة من نفس النوع فلابد أن نحصل على ع$_1$ ع$_3$ ل ع$_2$ ع$_3$. وجميع هذه الخواص بمقدار ما أدري مستقلة . وعلينا أن نضيف خاصية للمجال هي هذه : أي حدين ينتمي كل منهما لمجال مسافة من نوع (ليس من الضروري أن يكون النوع واحداً لكليهما) فلهما علاقة هي مسافة من هذا النوع . وإذ قد عرفنا الآن نوع المسافة ، فالمسافة هي أي علاقة تنتمي لنوع معين من المسافة . وبذلك يظهر أن التعريف قد بلغ التمام .

أما فكرة المسافة فهي كما سنرى معقدة أشد التعقيد . وخواص المسافات شبيهة بخواص الامتدادات ذات العلامة ، ولكنها أقل قدرة على الاستنتاج المتبادل . أما خواص الامتدادات المناظرة لكثير من خواص المسافات المذكورة آنفاً فهي قابلة للبرهنة . والفرق بينهما يرجع بوجه عام إلى أن الامتدادات يمكن أن تحمع بالطريقة المنطقية الابتدائية (لا الحسابية) على حين تحتاج المسافات إلى ما نسميه بالجمع « العلاقي » relational وهو شبيه جداً بالضرب النسبي .

٢٤٦ — سبق أن شرحنا في الجزء الثالث شرحاً جزئياً القياس العددي للمسافات . ورأينا أنه يحتاج في تطبيقه الكامل إلى مسلمتين أخريين لا يتعلقان بتعريف المسافات بل ببعض أنواع المسافات فقط . والمسلمتان هما : مسلمة أرشميدس القائلة بأنه إذا علمت مسافتان من نوع واحد ، فهناك عدد صحيح ن بحيث تكون القوة النونية للمسافة الأولى أكبر من المسافة الثانية . ومسلمة ديبوا ريموند Du Bois Reymond عن الخطية وهي هذه : كل مسافة فلها جذر

---

(١) وهذه خاصية مستقلة . وتفترض مثلاً التفرقة بين الضم من جهة الأمام والضم من جهة الخلف .

نوني ، حيث ن أي عدد صحيح (أو أي عدد أولي ويترتب على ذلك أي عدد صحيح) . فإذا تحققت هاتان المسلمتان أمكن أن تجد ا ع من معنى ، حيث ع مسافة من نفس النوع خلاف التطابق ؛ وحيث م أي عدد حقيقي [١] . وفضلا عن ذلك أي مسافة من نفس النوع هي من الصورة ع م . بفرض قيمة معينة ل ع مرة . أما م فهي بالطبع القياس العددي للمسافة .

وفي حالة المتسلسلات المتولدة بالطريقة الأولى من الطرق الست ، فإن القوى المتعددة للعلاقة ع المولدة تعطي مسافات الحدود . هذه القوى المتعددة — كما يمكن أن يتبين القارئ من تلقاء نفسه — تحقق جميع خواص المسافات المذكورة . وفي حالة المتسلسلات المتولدة عن متواليات ، كالمنطقات أو الأعداد الحقيقية من الأعداد الصحيحة ، فهناك دائماً مسافات . وهكذا فإنه في حالة المنطقات ذاتها التي هي علاقات واحد بواحد ، فإن الفروق بينها وهي أيضاً منطقات تقيس أو تدل على علاقات بينها . هذه العلاقات هي من طبيعة المسافات . وسترى في الجزء الخامس أن هذه العلاقات بعض الأهمية فيما يتصل بالنهايات . لذلك أن القياس العددي في بعض صوره أساسي في نظريات معينة عن النهايات . والقياس العددي للمسافات أدى إلى الإحراز العملي من الامتدادات .

٢٤٧ — فيما يختص بهذا السؤال العام : أتكون المتسلسلات غير المرتبطة بالعدد — مثل المتسلسلات المكانية والزمانية — بحيث تشتمل على مسافات ، فمن الصعب إبداء الرأي بالإيجاب . فهناك أمور يمكن أن تذكر ضد هذه الوجهة من النظر . فأولا لابد من وجود امتدادات ، ويجب أن تكون هذه الامتدادات مقادير . وعندئذ ينشأ مجرد فرض — ويجب أن نفحصه كبديهية — وهو أن الامتدادات المتساوية تناظر مسافات متساوية . بالطبع يمكن إنكار هذا الفرض ، ويمكن أن نبحث عن تأويل من الهندسة غير الإقليدية في هذا الإنكار . وقد ننظر إلى

---

(١) نوى المسافات بأسرة هذه يطلق عليها من عوامل الضرب النسبي . وهكذا إذا كانت ا ، ب لهما نفس المسافة مثل ب ، ج ، فهذه المسافة هي الجذر التربيعي للمسافة من ا ، ج . ومسلمة الخطية التي يمكن التعبير عنها في لغة عادية بقولنا : إن كل كمية خطية يمكن أن تنقسم إلى ن من الأجزاء المتساوية ، حيث ن عدد صحيح ، موجودة في كتاب

Du Bois Reymond, *Allgemeine Functionentheorie* (Tubingen, 1882), p. 46.

الإحداثيات العادية على أنها تعبر عن امتدادات ، وإلى لوغاريتمات نسبها غير التوافقية anharmonic على أنها تعبر عن مسافات . وبذلك يمكن أن تجد الهندسة الزائدية hyperbolic على الأقل تأويلا غريباً بعض الشيء — ويذهب الأستاذ مينونج وهو الذي يعد جميع المتسلسلات مشتملة على مسافات إلى مبدإ شبيه بذلك فيما يختص بالمسافة والامتداد بوجه عام . فهو يرى أن المسافة إنما تزداد بازدياد لوغاريتم الامتداد . ويمكن ملاحظة أنه حيث تكون المسافة ذاتها عدداً منطقاً (وهذا ممكن ما دامت المنطقات علاقات واحد بواحد) أمكن أن تجعل النظرية المقابلة مقبولة صورياً بالحقيقة الآتية . يقال إن مربع مسافة ما ، كما رأينا بوجه عام ، هو ضعف هذه المسافة التي هي مربعها . ويمكن أن نقول بدلا من ذلك حيث تكون المسافة عدداً منطقاً أن الامتداد هو الضعف : ولكن المسافة هي حقاً مربع المسافة الأولى . ذلك أنه حيث تكون المسافة عددية يتعارض التأويل العادي للقياس العددي مع الترقيم ع٢ . وبذلك نضطر إلى اعتبار الامتداد متناسباً مع لوغاريتم المسافة . ولكن ما دمت بصرف النظر عن نظرية المتواليات تملك عادة في وجود مسافات ، وما دامت الامتدادات في جميع المتسلسلات الأخرى تقريباً يظهر أنها محققة لجميع النتائج التي تريد الحصول عليها ، فإن استبقاء المسافة يضيف تعقيداً لسنا كقاعدة في حاجة إليه . من الأفضل إذن بوجه عام على الأقل في فلسفة الرياضيات استبعاد المسافات فيما عدا نظرية المتواليات ، وأن نقيمها في ظل تلك النظرية بدلالات قوى العلاقات المولدة . وليس ثمة سبب منطقي فيما أعرف لافتراض وجود مسافات في أي مكان ، فيما عدا المكان المتناهي ذي البعدين ، وفي الفراغ الإسقاطي . وحتى بفرض وجودها فإنها ليست ذات أهمية رياضية . وسترى في الجزء السادس كيف يمكن أن تنشأ نظرية المكان والزمان دون افتراض المسافة . أما المسافات التي تظهر في الهندسة الإسقاطية فهي علاقات مشتقة لا نحتاج إليها في تعريف خواص مكاننا . وسترى في الجزء الخامس أن وظائف المسافة قليلة جداً بالنسبة للمتسلسلات بوجه عام . ومما يعترض به على المسافة أيضاً أنه إذا وجب أن تشتمل كل متسلسلة على مسافات ، فلا مفر من التراجع إلى ما لا نهاية له ، ما دام كل نوع من المسافة هو نفسه متسلسلة . ولست أرى أن هذا اعتراض منطقي ، ما دام التراجع يعد من النوع

المسموح به منطقياً . ولكن الاعتراض يبين كيف تنشأ تعقيدات كبيرة من اعتبار المسافات ضرورية في كل متسلسلة . جملة القول يبدو أن وجود المسافات بوجه عام أمر مشكوك فيه . فإن وجدت كان وجودها غير ذي بال فيما يظهر ، ومصدر تعقيدات شديدة .

٢٤٨ ــ أكملنا الآن عرض الترتيب بمقدار الطاقة دون إدخال الصعوبات الخاصة بالاتصال واللانهاية . فرأينا أن كل ترتيب يتطلب علاقات متعدية لا متماثلة ، وأن أي متسلسلة من حيث هي كذلك فهي مفتوحة . ولكننا رأينا أن المتسلسلات المقفلة يمكن أن تتميز بطريقة تولدها . وبأنها مع أن لها دائماً حداً أول فهذا الحد الأول يمكن دائماً اختياره بطريقة تحكمية . ورأينا أن العلاقات اللامتماثلة يجب ألا تقبل التحليل في بعض الأحيان . فإذا قبلت التحليل فلابد أن تظهر علاقات لا متماثلة أخرى في التحليل . ووجدنا أن اختلاف العلامة يتوقف دائماً على الفرق بين العلاقة اللامتماثلة وعكسها . ورأينا عند مناقشة الصنف الخاص من المتسلسلات التي سميناه متواليات كيف أن جميع الحساب ينطبق على متسلسلة من هذه المتسلسلات . وكيف يمكن بواسطتها تعريف الترتيبيات المتناهية . ولكن مع أننا وجدنا أن هذه النظرية مستقلة إلى حد ما عن الأصليات ، إلا أننا لم نر أي سبب لموافقة ديديكند في اعتباره الأصليات تابعة منطقياً للترتيبيات . وأخيراً اتفقنا على أن المسافة فكرة ليست جوهرية في المتسلسلات ، وقليلة الأهمية خارج الحساب . وبهذا الزاد أرجو أن أكون قادراً على حل جميع الصعوبات التي وقف عندها الفلاسفة عادة عند النظر في الاتصال واللانهاية . وإذا استطعت أن أقوم بهذه المهمة فقد تحل إحدى المشكلات الفلسفية العويصة . وسيقتصر الجزء الخامس على بحث هذه المشكلة .

الجزء الخامس

اللانهاية والاتصال

الباب الثاني والثلاثون

ترابط المتسلسلات

٢٤٩ – نشرع الآن في بحث ما يعتبر بوجه عام المشكلة الأساسية في فلسفة الرياضيات – أعني مشكلة اللانهاية والاتصال . وقد تحولت هذه المشكلة على يدي فايرشتراس وكانتور تحولا كاملا . فمنذ نيوتن وليبنتز كانت طبيعة اللانهاية والاتصال تلتمس في المناقشات التي تعرف باسم الحساب التحليلي للكميات اللامتناهية في الصغر Infinitesimal calculus . وقد تبين أن هذا الحساب ليس في الواقع على صلة بأي شكل باللانهائي الصغر ، وأن فرعا كبيرا عظيم الأهمية من الرياضيات متقدم منطقيا عليه . وعلاوة على ذلك فإن مشكلة الاتصال قد فصلت إلى حد كبير عن مشكلة اللانهاية . وكان المعتقد فيما سبق – وهنا تقوم القوة الحقيقية في فلسفة كانط الرياضية – أن الاتصال تعلقا جوهريا بالمكان والزمان ، وأن الحساب التحليلي calculus (كما توحي بذلك لفظة fluxion) يفترض من بعض الوجوه الحركة ، أو على الأقل التغير . وطبقا لهذه الوجهة في النظر فلسفة المكان والزمان أسبق من الاتصال . فالاستطيقا الترنسندنتالية [1] تسبق الديالكتيك الترنسندنتالي . والنقائض (على الأقل الرياضية منها) هي أساسا زمكانية spatio-temporal . وكل ذلك قد غيرته الرياضيات الحديثة . وما يسمى بتحسيب الرياضيات arithmetization قد بين أن جميع المشكلات العارضة في هذا الصدد عن المكان والزمان موجودة من قبل في الحساب البحت . ولنظرية اللانهاية صورتان : أصلية وترتيبية ، فالأصلية تنشأ من النظرية المنطقية للعدد ، أما نظرية الاتصال فترتيبية بحتة . والمشاكل التي تنشأ في نظرية الاتصال والنظرية الترتيبية عن اللانهاية ليست متصلة بالعدد بوجه خاص ، بل بجميع المتسلسلات من صنف معين والتي

(١) لفظة ترنسندنتالي اصطلاح في فلسفة كانط ، transcendental ومعناه ... أوليا سابقا على التجربة (المترجم)

تحصل في الحساب والهندسة على حد سواء . ومما يجعل المشاكل المذكورة سهلة البحث بوجه خاص في حالة الأعداد ، فهو أن متسلسلة المنطقات التي سأسميها بالمتسلسلة « المتحدة » compact تنشأ من متوالية هي بالذات متوالية الأعداد الصحيحة . وهذه الحقيقة هي التي تمكننا من تسمية « كل » حد من متسلسلة المنطقات — وهي نقطة تختلف فيها هذه المتسلسلة عن غيرها من الصنف عينه . ولكن النظريات من هذا النوع ، والتي سنشتغل ببحثها في معظم الأبواب التالية ، مع أننا نحصل عليها في الحساب إلا أن لها ميداناً أوسع في التطبيق ، إذ كانت ترتيبية بحتة ولا تتطلب شيئاً من الخواص المنطقية للأعداد . بعبارة أخرى الفكرة التي يسميها الألمان Anzahl ، وهي فكرة عدد الحدود في فصل معين ، لا محل لها فيما عدا فقط نظرية الأصليات المتصاعدة transfinite وهذا جزء هام ولكنه متميز عن مساهمات كانتور في نظرية اللانهاية . وسنجد أنه من الممكن إعطاء تعريف عام للاتصال لا نرجع فيه إلى جملة الأفكار المتميزة التي لم تحلل والتي يسميها الكانطيون « الحدس » intuition . وسنجد في الجزء السادس أن أي اتصال آخر غير مطلوب في المكان والزمان . كما سنجد مع التمسك المدقق بمذهب النهايات أنه من الممكن الاستغناء تماماً عن اللانهائي الصغر حتى في تعريف الاتصال وفي أسس الحساب التحليلي .

٢٥٠ — من الحقائق الغريبة أنه بمقدار ما استبعد الحساب اللانهائي الصغر من الرياضيات ، فقد أتيح للانهائي فرصة أرحب للنمو . ويظهر من مباحث كانتور أن هناك اعتبارين بهما تختلف الأعداد اللامتناهية عن المتناهية . وأول الاعتبارين ينطبق على الأصليات والترتيبيات على حد سواء ، وهو أنهما لا يخضعان للاستنباط الرياضي — أو الأحرى أنهما لا يكونان جزءاً من متسلسلة تبدأ من ١ أو ٠ وتسير في ترتيب المقدار ومشتملة على جميع الحدود المتوسطة في المقدار بين أي حدين من حدودها ، ومتمشية مع الاستنباط الرياضي . والاعتبار الثاني الذي إنما ينطبق على الأصليات فقط ، فهو أن المجموع المكوّن من عدد لا نهائي من الحدود يشتمل دائماً على جزء يتكون من نفس عدد الحدود . والاعتبار الأول يكون التعريف الصحيح لمتسلسلة اللانهائية ، أو الأحرى ما يمكن أن تسميه الحدود اللانهائية في متسلسلة : وهذا التعريف يعطي جوهر اللانهائي الترتيبي . والاعتبار

الثاني يعطي تعريف المجموعة اللانهائية . وسيقول بلاشك الفلاسفة عنه إنه واضح التناقض مع نفسه . ولكن هؤلاء الفلاسفة إذا تنازلوا وحاولوا البحث في التناقض ، فسيجدون أنه إنما يبرهن عليه بتسليم الاستنباط الرياضي . وهم بذلك إنما يقيمون ارتباطاً مع اللانهائي الرتيبي . وعندئذ يضطرون إلى التسليم بأن إنكار الاستنباط الرياضي متناقض مع نفسه . فإن أنعموا النظر قليلا في هذا الموضوع . فقد يحسن بهم أن يبحثوا الأمر قبل الحكم عليه . فإذا سلمنا بأنه يمكن إنكار الاستنباط الرياضي بغير تناقض ، فستختفي بتاتاً تناقض اللانهاية والاتصال . وهذا ما سأحاول إثباته بالتفصيل في الأبواب الآتية .

٢٥١ — ستتاح لنا الفرصة خلال هذا الجزء لبحث فكرة لم تكد تذكر حتى الآن ، وهي ترابط المتسلسلات . فقد بحثنا في الجزء السابق طبيعة المتسلسلات المفردة ؛ ولكننا لم نبحث العلاقات بين مختلف المتسلسلات . ومع ذلك فهذه العلاقات لها أهمية عظيمة لم يفطن لها الفلاسفة ، ولم ينتبه لها الرياضيون إلا أخيراً . لقد كان معروفاً من زمن طويل ماذا يمكن عمله في الهندسة بواسطة التطابق homography ، مما يعد مثالا على الترابط correlation . وقد بين كانتور أهمية معرفة المتسلسلة المعدودة denumerable ، ومعرفة تشابه متسلسلتين لهما القدرة على الترابط . ولكن لم تجر العادة أن يبين كيف أن المتغير التابع ومتغيره المستقل هما في معظم الأحوال الرياضية مجرد متسلسلتين مترابطتين . ولا بحث الفكرة العامة للترابط بحثاً كاملا . والذي يعنينا بحثه في هذا الكتاب فهو الوجوه الفلسفية للموضوع فقط .

يقال إن متسلسلتين ل ، ل َ مترابطتان حين توجد علاقة واحد بواحد ع تجمع بين كل حد من حدود ل مع كل حد من حدود ل َ ، والعكس بالعكس ، وإذا كان س ، ص حدين في ل ، وكان س سابقاً على ص . فإن المترابطين معهما وهما س َ ، ص َ في ل َ يكونان بحيث يسبق س َ ص َ . ويقال إن فصلين أو مجموعتين مترابطان عندما توجد علاقة واحد بواحد بين حدود الأول وحدود الثاني بحيث لا يتخلف شيء . وهكذا نرى أن متسلسلتين يمكن أن يترابطا كفصلين دون أن يترابطا كتسلسلتين ، لأن الترابط كفصلين إنما يتطلب نفس العدد الأصلي ، على حين أن الترابط كتسلسلتين يتطلب أيضاً نفس الصنف الرتيبي — وهو تمييز

سنفسر أهميته فيما بعد . ولكي نميز بين هاتين الحالتين يحسن أن نتكلم عن ترابط الفصلين كمجرد ترابط . وعن ترابط المتسلسلتين كترابط ترتيبي . فكلما ذكر الترابط بغير صفة ، فعلينا أن نفهم أنه ليس من الضروري أن يكون ترتيبياً . ونسمي الفصلين المترابطين متشابهين similar ، ونسمي المتسلسلتين المترابطتين متشابهتين ترتيبياً ordinally similar ، وعلاقاتهما المولدة سنقول إن لها علاقة الشبه likeness .

الترابط طريقة بها يمكن إذا أعطيت متسلسلة أن يتولد عنها متسلسلات أخرى . فإذا وجدت أي متسلسلة علاقتها المولدة ص ، ووجدت علاقة واحد بواحد تقوم بين أي حد س من المتسلسلة وبين حد آخر نسميه س ع ، فإن فصل الحدود س ع يكون متسلسلة من نفس الصنف كفصل الحدود س . ولنفرض ص أي حد آخر من متسلسلتنا الأصلية ، ولنفرض أن س ف ص ، عندئذ نحصل على س ع ع ص ، ص ف س ، ص ع س ع . والحاصل هو س ع ع ف ع ص ع . ويمكن أن نبين الآن [١] أنه إذا كان ف متعدياً لا متماثلاً ، فكذلك ع ف ع . ومن ثم فإن مترابطات متسلسلة ف تكون متسلسلة علاقتها المولدة هي ع ف ع ، ويوجد بين هاتين المتسلسلتين ترابط ترتيبي ، ويوجد بين المتسلسلتين تشابه ترتيبي كامل . وبهذه الطريقة تتولد متسلسلة جديدة شبيهة بالمتسلسلة الأصلية . وذلك بعلاقة واحد بواحد يشمل مجالها المتسلسلة الأصلية . ويمكن أن نبين أيضاً أنه بالعكس إذا كان ف ، ف َ العلاقتين المولدتين في متسلسلتين متشابهتين ، فهناك علاقة واحد بواحد ع ميدانها هو مجال ف بحيث أن ف َ = ع ف ع .

٢٥٢ — ونستطيع الآن أن نفهم تمييزاً على أهمية عظمى ، نعني التمييز بين متسلسلة مكتفية بذاتها أو مستقلة ، ومتسلسلة بالترابط . وفي الحالة التي شرحناها من قبل هناك تماثل رياضي تام بين المتسلسلة الأصلية والمتسلسلة بالترابط . لأننا إذا رمزنا بالرمز ل للعلاقة ع ف ع ترتب على ذلك أن ف = ع ل ع . وهكذا يمكن اتخاذ إما متسلسلة ل أو متسلسلة ف كالمتسلسلة الأصلية ، وتعتبر الأخرى مشتقة منها derivative . ولكن إذا حدث أن ع بدلا من أن تكون علاقة

---

[١] انظر مقالي في مجلة RdM, Vol. VIII, No. 2

واحد بواحد كانت علاقة كثير بواحد ، فإن حدود مجال لج ، والتي سنسميها لم ، سيكون لها ترتيب فيه تكرار ، أي أن نفس الحد يقع في مواضع مختلفة مناظرة لمرابطاتها المختلفة في مجال ق . والذي سنسميه ق . وهذه الحالة العادية للدوال الرياضية التي ليست خطية ، وبسبب انشغال معظم الرياضيين بمثل هذه المتسلسلات فإنهم يعجزون عن تبين استحالة تكرر نفس الحد في المتسلسلة المستقلة . مثال ذلك أنه في كل جملة مطبوعة تكتسب الحروف ترتيباً بالترابط مع نقط المكان ، ويتكرر نفس الحرف في أوضاع مختلفة . والحال هنا أن متسلسلة الحروف مشتقة أساساً ، لأننا لا نستطيع أن نرتب نقط المكان بالعلاقة مع الحروف فهذا يعطي نقطاً متعددة في نفس الوضع بدلاً من حرف واحد في أوضاع عدة . الواقع إذا كانت ق علاقة متسلسلة ، و ع علاقة كثير بواحد ميدانها هو مجال ق ، وكان لج = ع̆ ق ع ، فإن لج له جميع خواص العلاقة المتسلسلة ما عدا خاصية استلزام التعدد . ولكن ع لج ع̆ لا تكافئ ق ، وبذلك يوجد نقص في التماثل . ولهذا السبب كانت عكس الدوال في الرياضيات مثل حا$^{-1}$ متميزة تميزاً حقيقياً عن الدوال المباشرة ، وتحتاج إلى تدبير خاص أو اصطلاح قبل أن تصبح ولا إبهام فيها . والمتسلسلات التي نحصل عليها من ترابط كثير بواحد . كما حصلنا على لج من قبل ، تسمى متسلسلات بالترابط ، وهي ليست متسلسلات أصلية ، ومن الأهمية بمكان استبعادها من المناقشات الأساسية

٢٥٣ — وفكرة الشبه likeness تناظر بين العلاقات التشابه بين الفصول ، وتُعرّف كما يأتي : تكون العلاقتان ق ، لج شبيهتين عندما توجد علاقة واحد بواحد ط بحيث أن ميدان ط هو مجال ق ، وتكون لج = ط̆ ق ط .

ولا تقتصر هذه الفكرة على العلاقات المتسلسلة بل يمكن تعميمها لتشمل جميع العلاقات . ويمكن تعريف عدد العلاقة relation-number لعلاقة ما ق بأنه فصل جميع العلاقات التي تشبه ق . ومن هنا نستمر إلى موضوع عام جداً يمكن أن نسميه حساب العلاقة relation-arithmetic . أما فيما يختص بأعداد العلاقة فيمكن إثبات تلك العلاقات الخاصة بالقوانين الصورية للجمع والضرب والتي تنطبق على الترتيبيات المتصاعدة . فنحصل بذلك على امتداد لجزء من الحساب الترتيبي يشمل

العلاقات بوجه عام . ويمكن بواسطة الشبه تعريف العلاقة المتناهية بأنها تلك التي لا تشبه أي جزء خاص من ذاتها — حيث أن الجزء الخاص من العلاقة هو علاقة تستلزمها دون أن تكافئها . وبهذه الطريقة يمكن أن نتحرر تماماً من الحساب الخاص بالأعداد الأصلية . وفضلا عن ذلك فإن خواص المتشابهة لها في ذاتها فائدة وأهمية . ومن خواصها الغريبة أنه إذا كانت ط علاقة واحد بواحد ولها المجال ق بذاتها : فالمعادلة المذكورة سابقاً ع = طَ ق ط تكافئ ط ع = ق ط أو ع طَ = طَ ق .

٢٥٤ - ما دام ترابط المتسلسلات أساس معظم الأمثلة الرياضية عن الدوال ، وكانت الدالة فكرة ليس شرحها واضحاً في الغالب ، فقد يحسن بنا أن نذكر شيئاً عن طبيعة هذه الفكرة . في صورتها الأعم جداً لا تختلف فكرة الدالة عن العلاقة . ويجدر في هذه المناسبة أن نتذكر اصطلاحين فنيين عرفناهما في الجزء الأول . إذا كان س له علاقة معينة مع ص ، فنسمي س « المتعلق به » referent ، ونسمي ص « المتعلق » relatum وذلك بالنسبة للعلاقة المذكورة . فإذا عرفنا س بأنه ينتمي لفصل مّا داخل في ميدان العلاقة ، حينئذ تعرّف العلاقة ص بأنها دالة دالة س . بعبارة أخرى يتكون متغير مستقل من مجموعة حدود كل حد منها يمكن أن يكون متعلقاً به بالنسبة لعلاقة معلومة . وعندئذ يكون لكل حد من هذه الحدود متعلق أو أكثر من متعلق . وأي حد منها هو دالة معينة لما يتعلق به ، من حيث أن الدالة تعرف بالعلاقة . مثال ذلك أن « الأب » يعرف دالة بشرط أن يكون المتغير المستقل فصلا داخلا في الحيوانات الذكور الذين يتشرون نوعهم أو سينشرونه . فإذا كان ا أب ب ، قيل إن ب دالة ا . المهم هو وجود متغير مستقل ، تعني أي حد من فصل مّا ، ووجود علاقة تمتد فتشمل المتغير . وعندئذ يكون المتعلق به هو المتغير المستقل ، ودالته أي واحد من المتعلقات المناظرة .

ولكن هذه الفكرة العامة جداً عن الدالة قليلة الفائدة في الرياضيات . وهناك طريقتان أساسيتان لتخصيص الدالة . الأولى أننا قد نخصص العلاقات بحيث

---

(١) انظر في هذا الموضوع مقالتي في مجلة R. d. M., Vol. VIII, Nos 2-6.

تقتصر على واحد بواحد أو كثير بواحد ، أى بحيث تعطى لكل متعلق به متعلقاً وحيداً ؛ والثانية أن نقصر التغير المستقل على المتسلسلات . والتخصيص الثانى فى غاية الأهمية ويدخل بوجه خاص فى موضوعنا الحاضر . ولكن حيث كان هذا التخصيص يكاد يستبعد الدوال تماماً من المنطق الرمزى؛ إذ المتسلسلات فيه قليلة الأهمية ، فقد يحسن أن نؤجل البحث فى هذا الوجه الثانى قليلا ، ولننظر فى التخصيص الأول فقط .

فكرة الدالة بالغة الأهمية ، والغالب أن بحثها كان مقتصراً على علاقتها بالأعداد ؛ لذلك يحسن أن نسوق أمثلة كثيرة على دوال غير عددية . ومن فصول الدوال العظيمة الأهمية القضايا المشتملة على متغير [١] . ولنكن قضية ما تقع فيها هذه العبارة « أى ا » حيث ا فصل ما . ثم نضع بدلا من « أى ا » س ؛ حيث س عضو غير معرف فى الفصل ا — وبعبارة أخرى أى ا . وعندئذ تصبح القضية دالة س ، وتصبح القضية فريدة إذا أعطيت س وستكون القضية على العموم صادقة لبعض قيم س ، وكاذبة لبعضها الآخر . والقيم التى تصدق لها الدالة تكوّن ما قد نسميه بالمنحنى المنطقى ، تشبيهاً بالهندسة التحليلية . وهذه النظرة العامة يمكن فى الواقع أن نجعلها تشمل الهندسة التحليلية . مثال ذلك أن معادلة المنحنى المستوى هى دالة قضية عبارة عن دالة ذات متغيرين س ، ص . والمنحنى هو مجموع النقط التى تعطى المتغيرين قيماً تجعل القضية صادقة . والقضية التى تشتمل على الفئة « أى » هى حكم بأن دالة قضية معينة صادقة لجميع قيم المتغير الذى تنطبق عليه . فقولنا : « أى إنسان فان » تقرر أن : « س إنسان يلزم عنها س فان » قضية صادقة لجميع قيم س التى تنطبق عليها ، والتى قد تسمى بالقيم المقبولة admissible . ودوال القضايا مثل « س عدد » لها خاصية أنها تبدو كالقضايا ؛ ويظهر أنها قادرة على استلزام دوال قضايا أخرى ، مع أنها ليست صادقة أو كاذبة . الواقع هى قضايا لجميع قيم المتغير المقبولة ؛ ولكنها لا تكون كذلك حين يظل المتغير متغيراً دون أن تعين قيمته . ومع أنها قد يلزم عنها لكل قيمة مقبولة للمتغير القيمة المناظرة لدالة قضية

---

(١) وهذه هى التى سميناها فى الجزء الأول دوال القضايا .

أخرى منها . إلا أنها لا يلزم عنها شيء حين يظل المتغير كمتغير . الحق إن مسألة طبيعة دالة القضية باعتبار أنها في مقابل القضية ، وبوجه عام مدالة في مقابل قيمها ، مسألة عويصة لا يمكن حلها إلا بتحليل طبيعة المتغير . ومع ذلك فمن المهم ملاحظة أن دوال القضايا كما بينا في الباب السابع أساسية أكثر من الدوال الأخرى بل أكثر من العلاقات . هذا ومن المناسب لتحقيق معظم الأغراض أن نطابق بين الدالة والعلاقة . فمثلاً إذا كان ص = د (س) تكافئ س ع ص ، حيث ع علاقة . فمن المناسب أن نصف ع بأنها الدالة . وهذا ما سنفعله فيما بعد . ومع ذلك ينبغي أن يتذكر القارئ أن فكرة الدالة أكثر أساسية من العلاقة . وقد بحثنا في هذه النقطة من قبل في الجزء الأول واستوفينا فيها الكلام لبيان كيف يمكن أن تكون القضية دالة متغير .

وتقدم لنا معاجم اللغة أمثلة أخرى على الدوال غير العددية . فالتعبير الفرنسي عن لفظة ما هو دالة التعبير الإنجليزي ، والعكس بالعكس ؛ وكلاهما دالتان للمعنى الذي يدلان عليه . وعلامة كتاب في كتالوج مكتبة هي دالة الكتاب ، والعدد في شفرة دالة اللفظة التي تنوب عنها . وفي جميع هذه الأحوال هناك علاقة يصبح بها المتعلق فريداً (أو في حالة اللغات فريداً على العموم) حين يعطى المتعلق به . ولكن حدود المتغير المستقل لا تكون متسلسلة إلا في الترتيب الخارجي البحت الناشئ عن الأبجدية .

٢٥٥ — ولنشرع الآن في البحث عن التخصيص الثاني ، وهو أن المتغير المستقل سيفضي إلى متسلسلة . في هذه الحالة المتغير التابع متسلسلة بالترابط ، وقد يكون أيضاً متسلسلة مستقلة . مثال ذلك أن المواضع التي تشغلها نقطة مادية في متسلسلة من اللحظات تكون متسلسلة بالترابط مع اللحظات التي هي دالة لها . ولكن بسبب اتصال الحركة فإنها كقاعدة تكون أيضاً متسلسلة هندسية مستقلة عن كل تعلق بالزمان . وبذلك تقدم الحركة أروع مثال على ترابط المتسلسلة . وفي الوقت نفسه توضح علامة هامة جداً إذا وجدت أمكننا القول إن المتسلسلة غير مستقلة . فعندما يعرف الزمن يتحدد على انفراد وضع الجسم المادي ؛ ولكن حين يعطى الوضع فقد تكون هناك لحظات عدة ، أو حتى عدد لامتناه منها تناظر الوضع المعطى .

(سيكون هناك عدد لامتناه من مثل هذه اللحظات إذا كان الجسم ساكناً في الوضع المذكور ، والسكون rest تعبير فضفاض مبهم ، ولكني أرجئ البحث فيه إلى الجزء السابع) ، وبذلك لا تكون علاقة الزمن بالوضع علاقة واحد بواحد بالضبط ، بل قد تكون علاقة كثير بواحد ، وقد كانت هذه الحالة موضع بحثنا عند عرضنا العام للترابط ، من حيث تنشأ عنه المتسلسلة التابعة ، وانتهينا كما نذكر إلى أن المتسلسلتين المستقلتين المترابطتين هما رياضياً في نفس المستوى ، لأنه إذا كانت ق ، ك علاقتيهما المؤقتتين ، ع علاقة الترابط ، استتبع أن ق = ع ك ع̆ من ك = ع̆ ق ع . ويبطل هذا الاستنتاج إذا لم تكن ع علاقة واحد بواحد بالضبط ، إذ عندئذ لا نحصل على ع ع̆ داخلة في ١ . رقم واحد حيث ١ يعني التطابق . مثال ذلك أن ابن والدي ليس من الضروري أن أكون أنا ، ولو أن والد ابني لابد أن يكون أنا . وهذا يوضح لنا هذه الحقيقة وهي أنه إذا كانت ع علاقة كثير بواحد ، ينبغي أن تميز مشابهة بين ع ع̆ ، ع̆ ع ، لأن الصورة الأخيرة داخلة في التطابق دون الأولى . وحينما كانت ع علاقة كثير بواحد فقد يمكن استخدامها لتكوين متسلسلة بالترابط ، ولكن المتسلسلة المتكونة على هذا النحو لا يمكن أن تكون مستقلة . وهذه نقطة هامة تقضي تماماً على النظرية العلاقية للزمن [١] .

ولنرجع الآن إلى حالة الحركة . عندما يقطع الجسم منحنى مغلقاً ، أو منحنى له نقط مزدوجة ، أو عندما يكون الجسم في حالة سكون أحياناً أثناء زمن متناه . عندئذ تكون متسلسلة النقط التي يشغلها متسلسلة بالترابط أساساً لا متسلسلة مستقلة . ولكن كما لاحظت من قبل نحن لا نحصل على المنحنى بالحركة فقط ، بل هو أيضاً شكل هندسي بحت يمكن تعريفه دون إشارة لأية نقطة مادية مفروضة ، مع ذلك فحين يعرف المنحنى على هذا النحو ، فلا يجب أن يشتمل على نقط من السكون ؛ لأن طريق النقطة المادية التي تتحرك أحياناً ، ولكنها تكون أحياناً في سكون بعض الوقت ، تختلف حين نعتبرها كيناتيكيا وحين نعتبرها هندسياً ، إذ هندسياً النقطة التي فيها سكون هي نقطة واحدة ، على حين أنها كيناتيكيا تناظر حدوداً كثيرة في المتسلسلة .

ونوضح المناقشة السالفة للحركة بمثال غير عددي حالة تقع عادة في دوال

(١) انظر مقالي عن الوضع في الزمان والمكان [illegible] Mind, July 1901.

الرياضيات البحتة . وهذه الدوال (حين تكون دوال لمتغير حقيقى) تحقق فى العادة الشروط الآتية : أن المتغير المستقل والتابع كليهما فصلان للأعداد ، وأن العلاقة المعرفة للدالة علاقة كثير بواحد (١). وهذه الحالة تشمل الدوال المتعلقة ، والدوال الدائرية والناقصية لمتغير الحقيقى ، والغالبية العظمى للدوال المباشرة فى الرياضيات البحتة . وفى جميع هذه الأحوال يكون المتغير المستقل متسلسلة أعداد يمكن أن نقصرها على أى وجه نشاء — على الأعداد الموجبة ، أو المتعلقات ، أو الأعداد الصحيحة ، أو الأعداد الأولية ، أو أى فصل آخر . والمتغير التابع يتكون أيضاً من أعداد ، غير أن ترتيب هذه الأعداد تحدده علاقتها بالحد المناظر للمتغير المستقل لا بالأعداد المكونة للمتغير التابع ذاتها . وفى عدد كثير من الدوال قد يحدث أن يتفق الترتيبان . وفى غيرها حيث يوجد نهايات عظمى وصغرى على أبعاد متناهية ، يتفق الترتيبان على طول امتداد متناه ثم ينقلبان متقابلين تماماً على طول امتداد متناه آخر ، وهكذا . فإذا كان س المتغير المستقل ، ص المتغير التابع ، وكانت العلاقة المكونة علاقة كثير بواحد ، فإن نفس العدد س سيكون بوجه عام دالة لأعداد كثيرة من س ، أى مناظراً لها . ولذلك نحصل على متسلسلة ص بالترابط ضرورة ، ولا يمكن أن تؤخذ على أنها متسلسلة مستقلة . فإن شئنا بعد ذلك أن نبحث فى عكس الدالة التى تعرف بعكس العلاقة احتجنا إلى تدابير معينة إذا كنا لا نزال نريد الحصول على ترابط المتسلسلة . وأحد هذه التدابير الذى يبدو أعظمها أهمية يقوم على تقسيم قيم س المناظرة لنفس قيمة ص إلى فصول ، بحيث يمكن أن نميز مثلاً ن من السينات المختلفة ، كل منها له علاقة واحد بواحد متميزة مع ص . وبذلك يمكن أن تعكس ببساطة وهذا هو الطريق المعتاد مثلاً لتمييز الجذور التربيعية الموجبة والسالبة . وهذا ممكن حيثما كانت العلاقة المؤلفة لدالتنا الأصلية قادرة صورياً على الظهور كانفصال لعلاقات الواحد بالواحد ومن الواضح أن العلاقة الانفصالية disjunctive المكونة من ن من علاقات واحد بواحد كل منها تشتمل فى ميدانها على فصل معين ى ستكون على طول الفصل ى علاقة ن بواحد . وهكذا قد يحدث أن ينقسم المتغير المستقل إلى ن من الفصول وفى داخل كل واحد منها العلاقة المعرفة هى علاقة واحد بواحد ، أى فى داخل كل

---

(١) واستبعد فى الوقت الحاضر المتغيرات المركبة التى تؤدى مع إدخال الأبعاد إلى تعقيدات من نوع متميز تماماً .

منها لا يوجد إلا س فقط له مع ص المعينة العلاقة المعرفة . وفى مثل هذه الأحوال المعتادة فى الرياضيات البحتة يمكن أن تجعل علاقة الكثير بالواحد انفصالا للعلاقات الواحد بالواحد التى ينعكس كل منها على انفراد . أما فى حالة الدوال المركبة ، فهذه مع بعض التغييرات الضرورية طريقة سطوح ريمان Riemann . إلا أنه لابد من أن نذكر بوضوح أنه حيث لا يكون دائما واحد بواحد بالطبع ، فإن ص الذى يظهر كمتغير تابع ، يكون عادة متميزاً عن س الذى يظهر كمتغير مستقل فى الدالة العكسية .

الملاحظات السابقة التى سنزيدها توضيحاً مع سيرنا فى البحث قد بينت فيما أرجو الارتباط الوثيق بين ترابط المتسلسلات ، وبين الاستخدام الرياضى العادى للدوال . وستصادف كثيراً من الحالات الأخرى على أهمية الترابط خلال البحث . هنا ويمكن أن نلاحظ أن كل فصل معدود يتعلق بدالة أحادية القيم one - valued function مع الأعداد الصحيحة المتناهية ، والعكس بالعكس . وحيث أن هذا الفصل مرتب بالترابط مع الأعداد الصحيحة فإنه يصبح متسلسلة لها صنف الترتيب الذى يسميه كانتور ω . وستظهر أهمية الترابط الأساسية بالنسبة لنظرية كانتور عن الأعداد المتصاعدة حين نعرض لتعريف الترتيبات المتصاعدة .

٢٥٦ ــ وبمناسبة البحث فى الدوال يبدو من المناسب أن نذكر شيئاً عن الصيغة وضرورتها للتعريف . كانت الدالة أساساً وبعد أن بطلت أن تكون مجرد قوة power ، شيئاً يمكن التعبير عنه فى صيغة . وكان من المعتاد البدء بعبارة تشتمل على متغير س ، دون ذكر شيء عن ماهية س خلاف هذا الفرض المفهوم ضمناً من أن س نوع مَّا من العدد . وأى تحديدات بعد ذلك لـ س فهي مشتقة إن وجدت من الصيغة نفسها ، ولذلك اتجهت الرغبة إلى استبعاد مثل تلك التحديدات التى أفضت إلى تعميمات شتى عن العدد . هذا التعميم الجبرى[1] حل الآن محله بحث أكثر ترتيباً تعرَّف فيه جميع الفصول بواسطة الأعداد الصحيحة . دون أن تدخل الصيغ فى العملية . ومع ذلك فللصيغة أهمية خاصة عند استخدام الدوال حيث تكون المتغيرات المستقلة والتابعة فصولاً لا متناهية . ولنشرع الآن فى بحث تعريف الصيغة .

(١) واعرض ما كتب عنه فى كتاب كوتيرا
Couturat, De L'Infini Mathématique, Paris, 1896, Part I, Book II

الصيغة بمعناها العام جداً قضية أو الأحرى دالة قضية تشتمل على متغير أو أكثر من متغير ، حيث أن المتغير هو أى حد فى فصل معرف ؛ أو حتى أى حد بغير تقييد . ونوع الصيغة الداخلة فى الدوال ذات المتغير المفرد هى صيغة تشتمل على متغيرين ، فإذا عرّفنا كلا المتغيرين ، كأن يكون أحدهما منتمياً للفصل ى والآخر للفصل ف ، كانت الصيغة صادقة أو كاذبة . فهى صادقة إذا كان كل ى له مع كل ف العلاقة المعبر عنها بالصيغة ، وإلا فهى كاذبة . ولكن إذا كان أحد المتغيرات ، وليكن س ، معرفاً على أنه ينتمى للفصل ى ، على حين لا يعرف المتغير الآخر ص إلا بواسطة الصيغة ، عندئذ يمكن اعتبار الصيغة معرفة ص كدالة لـ س . ولنسم الصيغة ف س ص . فإذا كان فى الفصل ى حدود هى س بحيث لا يوجد حد هو ص يجعل ف س ص قضية صادقة ، فالصيغة فيما يختص بتلك الحدود مستحيلة . ينبغي إذن أن نفترض أن ى فصل كل حد فيه لقيمة مناسبة من قيم ص يجعل القضية ف س ص صادقة . فإذا وجد لكل حد س فى الفصل ى بعض الأشياء هى ص تجعل ف س ص صادقة ، وأشياء أخرى لا تجعلها كذلك ، عندئذ ف س ص تربط مع كل س فصلاً معيناً من الحدود هو ص . وبهذه الطريقة نعرف ص كدالة لـ س .

ولكن المعنى العادي « للصيغة » فى الرياضيات يستدعي عنصراً آخر يمكن أن يعبر عنه أيضاً بلفظة « القانون » law . ومن الصعوبة أن نذكر بالضبط ما هذا العنصر . ولكن يظهر أنه ينطوي إلى حد كبير على تبسيط شديد للقضية ف س ص . وفى حالة وجود لغتين مثلا فقد يقال إنه لا توجد صيغة تربطهما سوى الحالات فى مثل قانون جريم Grimm's law [1] . فإذا صرفنا النظر عن المعاجم ، فإن العلاقة التي بها ترابط الألفاظ فى شتى اللغات هى عينية sameness المعنى . ولكن هذا لا يعطينا أى طريقة بها نستنتج حين نعلم لفظة فى إحدى اللغات اللفظة المناظرة لها فى لغة أخرى . فما نفقده ههنا هو إمكان الحساب . أما الصيغة « (لتكن ص =

---

(١) هو قانون تبادل الحروف المكتشف فى اللغات الآرية ، وأول من وضعه جريم فى كتابه Deutsche Grammatik فى النحو الألماني سنة ١٨٢٢ . وطبقاً لهذا القانون حرف p فى اللغات اليونانية واللاتينية والسنسكريتية يصبح حرف f فى اللغة الجرمانية . وحرف t يصبح th . مثال ذلك Pater أصبح father . (المترجم)

٢ س) فإنها تسمحنا بالوسيلة التي بها حين نعرف س أن نكتشف ص . وأما في حالة اللغات فطريقة الإحصاء وحدها لجميع الأزواج هي التي تعرّف المتغير التابع . وفي حالة الصيغة الجبرية ، يمكننا المتغير المستقل والعلاقة من معرفة كل شيء عن المتغير التابع . فإذا وجب أن تمتد الدوال حتى تشمل الفصول اللامتناهية كان الأمر السابق أساسياً ، لأن الإحصاء أصبح مستحيلاً . فمن الجوهري إذن لترابط الفصول اللامتناهية ، ولبحث دوال الفصول اللامتناهية أن تكون الصيغة ف س ص بحيث إذا علمت س أمكن أن نكتشف فصل حدود ص الذي يحقق الصيغة . واعترف بعجزي عن إعطاء بيان منطقي لهذا الشرط ، وأظن أنه أمر نفساني بحت . ومع أن أهميته العملية كبيرة ، إلا أن أهميته النظرية مشكوك فيها كثيراً مما يظهر .

ومع ذلك هناك شرط منطقي يتصل بالمسألة السابقة على الرغم من أنه ربما لم يكن مطابقاً له تماماً . فإذا علم أي حدين فهناك علاقة ما تقوم بينهما لا غير ، ويترتب على ذلك أنه إذا علم أي فصلين للحدين ى ، ف ، فهناك علاقة انفصالية تقوم بين أي حد واحد من ى وبين على الأقل حد واحد من ف : ولا تقوم بين أي حد غير داخل في ى وبين أي حد . وبهذه الطريقة حين يكون الفصلان كلاهما متناهياً ، يمكن أن نجري ترابطاً (قد يكون ترابط واحد بواحد ، أو كثير بواحد أو واحد بكثير) يربط حدود هذين الفصلين ولا غير . وبهذا السبيل ، أي منظومة من الحدود فهي نظرياً دالة أي منظومة أخرى : وبهذا فقط مثلا توضع الشفرة الدبلوماسية . ولكن إذا كان عدد الحدود في الفصل المكوّن للمتغير المستقل لا متناهياً ، فلا يمكننا عملياً بهذه الطريقة تعريف الدالة ، إلا إذا كانت العلاقة الانفصالية تشتمل على علاقات ينشأ إحداها من الأخرى بقانون . وفي هذه الحالة إنما تنقل الصيغة إلى العلاقة . وبعبارة أخرى لا يجب أن تكون العلاقة المعرفة للدالة مركبة إلى ما لا نهاية له ، أو إذا كانت كذلك فينبغي أن تكون هي ذاتها دالة معرفة بعلاقة ما مركبة تركيباً متناهياً . ومع أن هذا الشرط هو نفسه منطقي فليست ضرورته فيما أظن إلا نفسانية . وبمقتضى هذا الشرط لا نستوعب اللامتناهي إلا بواسطة قانون الترتيب . ومناقشة هذه النقطة تتطلب مناقشة علاقة اللانهاية بالترتيب — وهي مسألة سنستأنف القول فيها فيما بعد ، إذ لم نتهيأ الآن لبحثها بتبصرة . على كل حال يمكن أن نقول إن الصيغة التي تشتمل على متغيرين ودالة

معرفة فلابد إذا وجب أن تكون عددية ، أن تعطى علاقة بين المتغيرين بمقتضاها إذا علم أحدهما أمكن الكشف عن جميع القيم المناظرة للآخر . ويظهر أن هذا يكون الجوهر الرياضى لجميع الصيغ .

٢٥٧ — يجب فكرة منطقية متميزة تماماً بالغة الأهمية فى صلتها بالنهايات تمتى فكرة المتسلسلة التامة complete . إذا كانت ع العلاقة المعرفة لمتسلسلة ، كانت المتسلسلة تامة حين يوجد حد من ينتمى إلى المتسلسلة بحيث يكون كل حد آخر له مع من إما العلاقة ع ، أو العلاقة ع متمما للمتسلسلة . فهى « متواصلة connected » (كما شرحنا فى الجزء الرابع) حين لا ينتمى أى حد آخر إلى المتسلسلة . فالمتسلسلة التامة تتكون من تلك الحدود ولا غير التى لها العلاقة المولدة أو عكسها لحد واحد منها بالإضافة إلى هذا الحد الواحد . وما دامت العلاقة متعدية فالمتسلسلة التى تحقق هذا الشرط لأحد حدودها تحققه كذلك لجميع حدودها . والمتسلسلة التى تكون موصولة ، ولكن ليست تامة ، تسميها غير تامة incomplete ، أو جزئية . ومن أمثلة المتسلسلات التامة الأعداد الصحيحة الأصلية ، أو الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة والصفر ، أو الأعداد المنطقة ، أو لحظات الزمان ، أو النقط على خط مستقيم . وأى اختيار من مثل هذه المتسلسلات فهو غير تام بالنسبة للعلاقات المولدة للمتسلسلات التامة المذكورة . مثال ذلك الأعداد الموجبة متسلسلة غير تامة ، وكذلك المنطقات بين ٠ ، ١ . وإذا كانت المتسلسلة تامة فلا يمكن أن يأتى حد قبل أو بعد أى حد فى المتسلسلة ، دون أن ينتمى إليها . ولا يكون الحال كذلك إذا كانت المتسلسلة غير تامة . وقد تكون المتسلسلة تامة بالنسبة لعلاقة مولدة واحدة ، ولكن لا بالنسبة لعلاقة أخرى . فالأعداد الصحيحة المتناهية متسلسلة تامة حين تعرف المتسلسلة بقوى علاقة التعاقب ، كما بينا فى مناقشة المتواليات فى الجزء الرابع ، أما حين ترتب بترابط الكل بالجزء ، فلا تكون إلا جزءاً من متسلسلة الأعداد الصحيحة المتناهية والمتصاعدة ، كما سنرى فيما بعد . ويمكن أن تعد المتسلسلة التامة شاملة امتداد حد له نسبة مع علاقة معلومة وهذا الحد نفسه معاً ، وبالنظر إلى هذه الحقيقة فلها كما سنرى بعض الفروق الهامة عن المتسلسلات غير التامة الترتيبية الشبيهة . ولكن يمكن أن نبين بمنطق العلاقات أن أى متسلسلة غير تامة فيمكن أن نقلبها تامة بتغيير فى العلاقة المولدة ، والعكس بالعكس . ومن هذا يتبين أن التمييز بين المتسلسلات التامة وغير التامة يرجع أساساً إلى علاقة مولدة معلومة .

الباب الثالث والثلاثون

الأعداد الحقيقية

٢٥٨ – قد يدهش الفلاسفة بعد كل ما قيل عن الأعداد حين يجدون أنهم إنما يستطيعون الآن فقط أن يعلموا شيئاً عن الأعداد «الحقيقية». وستنقلب دهشتهم فزعاً حين يعلمون أن «الحقيقي» يقابل «المنطق». ولكن ستطمئن قلوبهم عندما يعلمون أن الأعداد الحقيقية ليست بالحقيقة أعداداً على الإطلاق، بل شيئاً مختلفاً كل الاختلاف.

تشتمل متسلسلة الأعداد الحقيقية حسب تعريفها الترتيبي على المجموع الشامل للأعداد المنطقة واللامنطقة، من حيث أن اللامنطقات تعرف بأنها نهايات المتسلسلات المنطقة التي ليس لها نهاية منطقة أو لا متناهية. ومع ذلك فهذا التعريف يقدم صعوبات عويصة سنتولى بحثها في الباب القادم. والرأي عندي أني لا أجد أي سبب لافتراض وجود أعداد لامنطقة بالمعنى المذكور. وحتى إذا وجدت فيبدو مما لا ريب فيه أنها لا يمكن أن تكون أكبر من الأعداد المنطقة أو أصغر منها. وحين أحرز الرياضيون تعميماً خاصاً بالعدد، فهم جديرون بأن يكونوا في غاية التواضع بشأنه. فهم يظنون أن الفرق بين الأفكار المعممة والأصلية أقل مما هو في الواقع. وقد رأينا من قبل أن الأصليات المتناهية لا يجب أن نطابق بينها وبين الأعداد الصحيحة الموجبة، بل ولا بينها وبين نسب الأعداد الطبيعية إلى ١. وكلاهما يعبر عن علاقات لا تعبر عنها الأعداد الطبيعية. وكذلك يوجد عدد حقيقي مرتبط بكل عدد منطق، ولكنه متميز عنه. والعدد الحقيقي فيما سأفترض ليس شيئاً آخر سوى فصل معين من الأعداد المنطقة. ففصل المنطقات التي أقل من $\frac{1}{2}$ عدد حقيقي مرتبط بالعدد المنطق $\frac{1}{2}$، ولكنه من الواضح ليس متطابقاً معه. وهذه النظرية لا يؤيدها صراحة فيما أعلم أي مؤلف آخر، ولو أن بيانو يوحي بها، ويقترب كانتور اقتراباً شديداً منها(١). والأسباب التي أستند إليها في تأييد هذا الرأي

(١) انظر Cantor, Mathem. Annalen, vol. XXI, § 9; Peano, Rivista di Matematica, vol. VI, pp. 126–140, esp. p. 133.

هي أولا أن مثل هذه الفصول من المنطقات لها جميع الخواص الرياضية التي تنسب عادة للأعداد الحقيقية ، وثانياً أن النظرية المقابلة تعرض صعوبات يظهر لي أنها لا تحل . وسنناقش النقطة الثانية في الباب التالي ، أما الآن فسأقتصر على عرض وجهة نظري فقط . محاولا أن أبين أن الأعداد الحقيقية بهذا المعنى لها جميع الخصائص المطلوبة . وأحب أن أنبه على أن هذه النظرية مستقلة عن مذهب النهايات الذي لن نعرض لبحثه إلا في الباب القادم .

٢٥٩ — الأعداد المنطقة بترتيب المقدار تكوّن متسلسلة فيها حد بين أي حدين. ومثل هذه المتسلسلة التي سميناها مؤقتاً في الجزء الثالث متصلة continuous ، يجب أن نطلق عليها الآن اسماً آخر ، لأننا سنحتفظ بلفظة «المتصل» continuous للمعنى الذي خصصه كانتور لها . واقترح أن أسمي مثل هذه المتسلسلة ملتحمة compact. فالأعداد المنطقة تكوّن إذن متسلسلة ملتحمة. ويجب ملاحظة أنه يوجد في المتسلسلة الملتحمة عدد لامتناه من الحدود بين كل حدين ، ولا توجد حدود متعاقبة ، وأن الامتداد stretch بين أي حدين (كانا داخلين أو لا) هو مرة أخرى متسلسلة ملتحمة . ولننظر الآن في أي عدد واحد منطق [١] ، وليكن ر ، في استطاعتنا بالعلاقة مع ر تكوين أربعة فصول لا متناهية من المنطقات : (١) الأصغر من ر (٢) التي ليست أكبر من ر (٣) الأكبر من ر (٤) التي ليست أصغر من ر . وتختلف (٢) ، (٤) عن (١) ، (٣) على التوالي بشيء واحد فقط هو أن الأوليين تشتملان على ر ولا يشتمل الأخريان عليها . ولكن هذه الحقيقة تفضي إلى فروق غريبة في الخواص . ذلك أن (٢) له حد أخير ، على حين أن (١) ليس له ، و (١) متطابق مع فصل الأعداد المنطقة الأصغر من حد متغير في (١) . وليست لـ (٢) هذه الخاصية . وتنطبق ملاحظات شبيهة بذلك على (٣) و (٤) ولكن هذين الفصلين أهميتهما أقل في الحالة الراهنة من (١) و (٢) . وفصول المنطقات التي لها خواص (١) تسمى قطع segments .

---

(١) مثل هذه المتسلسلة يسميها كانتور überall dicht

(٢) سأقتصر بالكلية على المنطقات الخالية من الصفر للتبسيط . أما حالة المنطقات الموجبة أو السالبة فلا يثير أي صعوبة .

والقطعة من المنطقات يمكن أن تعرف بأنها فصل المنطقات الذي ليس صفراً . ومع ذلك ليس متساوياً coextensive مع المنطقات نفسها (أي الذي يشتمل على بعض المنطقات لا كلها) ، والذي يكون متطابقاً مع فصل المنطقات الأصغر من حد (متغير) هو أحد حدودها ، أي مع فصل المنطقات س بحيث يوجد منطق س في الفصل المذكور بحيث أن س أصغر من س[1] . وسنجد الآن أننا نحصل على القطع بالطريقة المذكورة لا من المنطقات المفردة فقط ، بل أيضاً من فصول المنطقات المتناهية أو اللامتناهية ، بشرط أنه فيما يختص بالفصول اللامتناهية يجب أن يوجد منطق ما أكبر من أي عضو في الفصل . ويجري ذلك ببساطة على النحو التالي :

ليكن ى أي فصل من المنطقات المتناهية أو اللامتناهية . عندئذ يمكن تعريف أربعة فصول بعلاقتها مع ى[2] ، وهي (١) الأصغر من كل ى (٢) الأصغر من أحد متغيرات ى (٣) الأكبر من كل ى (٤) الأكبر من أحد متغيرات ى ، أي الفصول التي تكون بحيث يوجد لكل منها حد من ى أصغر منها . وإذا كان ى فصلاً متناهياً : فيجب أن يكون له حد أكبر وحد أصغر . وفي هذه الحالة الأول وحده يدخل في (٢) و (٣) والآخر وحده في (١) و (٤) . وهكذا ترد هذه الحالة إلى الأولى التي كان لنا فيها منطق مفرد فقط . سأفترض إذن في المستقبل أن ى فصل لامتناه . ثم لكي أستبعد الرد للحالة الأولى سأفترض عند بحث (٢) و (٣) أن ى ليس له حد أكبر ، وبعبارة أخرى كل حد من حدود ى أصغر من حد آخر من حدود ى . وعند بحث (١) و (٤) سأفترض أن ى ليس له حد أصغر . وسأقتصر الآن على (٢) و (٣) وافترض ، بالإضافة إلى غياب الحد الأكبر ، وجود منطقات أكبر من ى ، أي وجود الفصل (٣) . وفي ضوء هذه الظروف يكون الفصل (٢) قطعة . ذلك أن (٢) يشتمل على جميع المنطقات التي هي أصغر من متغيرات ى ويترتب على ذلك أولاً أنه ما دام ى ليس له حد أكبر maximum ، فإن (٢) يشتمل على جميع ى . وثانياً ما دام كل حد في (٢) أصغر

---

(١) انظر Formulaire de Mathématiques, Vol. II, Part III, § 61. Peano, 1899

(٢) يمكن تعريف ثمانية فصول ، ولكنها لا تعدو أن تكون أربعة

من بعض ى ـ الذى ينتمى بدوره إلى (٢) ـ فإن كل حد فى (٢) أصغر من حد آخر ما فى (٢) ، وكل حد أصغر من أى حد ما فى (٢) فهو من باب أولى أصغر من بعض ى ، ويكون على ذلك حداً فى (٢) . ويترتب على ذلك أن (٢) متطابق مع فصل الحدود الأصغر من حد ما فى (٢) ، فيكون بذلك قطعة .

نخلص من ذلك إلى النتيجة الآتية : إذا كان ى منطقاً مفرداً ، أو فصل منطقات كلها أصغر من منطق ثابت ما ، فإن المنطقات الأصغر من ى إذا كان ى حداً مفرداً ، أو أصغر من حد متغير من حدود ى إذا كان ى فصلا من الحدود ، تكون دائماً قطعة من المنطقات . فالذى أذهب إليه هو أن قطع المنطقات هو عدد حقيقى .

٢٦٠ ـ الطريقة التى استخدمت حتى الآن طريقة يمكن استخدامها فى أى متسلسلة ملتحمة . وتعتمد بعض النظريات فى بحثنا التالى على أن المنطقات متسلسلة معدودة denumerable . وسأرجئ فى الوقت الحاضر حتى النظريات المعتمدة على هذه الحقيقة ، وأشرع فى بحث خواص قطع المنطقات .

ولما أن بعض القطع تشتمل على المنطقات التى هى أصغر من منطق معلوم ، ونجد أن بعضها ولو أنها لم تعرف حسب هذا التعريف إلا أنها مع ذلك ممكنة التعريف على هذا النحو . مثال ذلك المنطقات الأصغر من حد متغير من المتسلسلة ٠,٩ ، ٠,٩٩ ، ٠,٩٩٩ ، إلخ فهى نفس المنطقات الأصغر من ١ . ولكن القطع الأخرى التى تناظر ما يسمى عادة باللامنطقات لا تقبل مثل هذا التعريف . وسنرى فى الباب التالى كيف أدت بنا هذه الحقيقة إلى اللامنطقات . والذى إنما أود بيانه فى الوقت الحاضر فهو هذه الحقيقة المعروفة جيداً من أن القطع قاصرة عن ترابط الواحد بالواحد مع المنطقات . وهناك فصول من المنطقات تعرف على أنها مؤلفة من جميع الحدود الأصغر من حد متغير ما فى فصل لا متناه من المنطقات ، والتى لا تقبل التعريف كجميع المنطقات الأصغر من منطق واحد معرف(١) . وفضلا عن ذلك هناك قطع أكثر من منطقات ، ومن ثم كان لمتسلسلة القطع اتصال أعلى ترتيباً من المنطقات ، والقطع تكون متسلسلات بفضل علاقة الكل بالجزء ، أو بفضل علاقة

(١) [illegible]

الاستغراق (مع استبعاد التطابق) . فأى قطعتين فيهما بحيث تكون إحداهما محوية تماماً في الأخرى . وبفضل هذه الحقيقة تكونان متسلسلة . ويمكن بسهولة أن يبين أنهما يكونان متسلسلة متلاحمة . والأجدر بالنظر هو هذا : إذا طبقنا العملية المذكورة على متسلسلة قطع ، نكوّن قطعاً من قطع بفضلها مع فصول قطع ، وجدنا أن كل قطعة من قطع يمكن تعريفها بأنها جميع القطع المتضمنة في قطعة معرفة معينة . وهكذا فإن قطعة القطع المعرفة بفصل قطع تتطابق دائماً مع قطعة القطع المعرفة بقطعة واحدة ما . وأيضاً فإن كل قطعة تعرف قطعة قطع يمكن أن تعرف بفصل لامتناه من القطع . وهاتان الخاصتان تجعلان متسلسلة القطع كاملة perfect بحسب لغة كانتور . غير أن تفسير هذا الاصطلاح يجب أن نرجئ شرحه إلى أن نبحث في مذهب النهايات .

كما نستطيع أن نعرف قطعة بأنها جميع المتعلقات الأكبر من حد ما في الفصل ى من المتعلقات . ولو كنا قد فعلنا ذلك وشرطنا أن ى ليس له حد أصغر ، وأنه ليس هناك متعلقات أصغر من كل ى ، لكنا قد حصلنا على ما يمكن تسميته بالقطع العليا ، باعتبارها متميزة عن النوع السابق الذى يمكن أن نسميه القطع الدنيا . وعندئذ كنا نجد قطعة دنيا تناظر كل قطعة عليا . وأن تلك القطعة الدنيا تشتمل على جميع المتعلقات التى لا تشتمل القطعة العليا عليها ، باستثناء متعلق وحيد فى بعض الأحيان . سيوجد متعلق واحد لا ينتمى إلى القطعة العليا أو الدنيا حين تعرف القطعة العليا بأنها جميع المتعلقات الأكبر من متعلق وحيد . وفى هذه الحالة ستشتمل القطعة الدنيا المناظرة على جميع المتعلقات الأصغر من هذا المتعلق الوحيد الذى لن ينتمى بذاته إلى أى قطعة من القطعتين . وما دام هناك متعلق بين أى اثنين ، فلا يمكن أن يكون فصل المتعلقات التى ليست أكبر من متعلق متطابقاً مع فصل المتعلقات الأصغر من متعلق آخر ما . ولا يمكن أبداً أن يكون فصل المتعلقات الذى له حد أكبر قطعة . لذلك كان من المستحيل فى الحالة المذكورة أن نجد قطعة دنيا تشتمل على جميع المتعلقات التى لا تنتمى للقطعة العليا المعلومة . ولكن حين لا يمكن أن نعرف القطعة العليا بمتعلق وحيد ، فمن الممكن دائماً أن نجد قطعة دنيا تشتمل على جميع المتعلقات غير المنتمية للقطعة العليا .

ويمكن إدخال الصفر واللانهاية على أنهما حالات نهائية للقطع . ولكن فى

حالة الصفر يجب أن تكون قطعة من النوع الذى سميناه (١) سابقاً ، لا من النوع (٢) الذى ناقشناه هناك . ومن السهل أن نقيم فصلا من المنطقات بحيث يكون حدها من الفصل أصغر من أى منطق معلوم . وفى هذه الحالة لن يشتمل الفصل (١) على أى حد ، فيكون الفصل الصفرى . وهذا هو العدد الحقيقى صفر الذى ليس مع ذلك قطعة ، ما دمنا قد عرفنا القطعة بأنها فصل ليس صفراً . ولكى ندخل الصفر على أنه فصل من النوع الذى سميناه (٢) ، فيجب أن نبدأ بفصل صفرى من المنطقات . وحيث إنه لا منطق أصغر من حدماً فى فصل صفرى من المنطقات ، فإن الفصل (٢) فى مثل هذه الحالة صفرى . وبالمثل يمكن أن ندخل العدد الحقيقى اللانهاية . وهذا مطابق لفصل المنطقات بأسره . فلو كان عندنا فصل ى من المنطقات بحيث لا منطق أكبر من جميع اليامات ، كان كل منطق داخلا فى فصل المنطقات الأصغر من بعض ى . أو مرة أخرى إذا كان عندنا فصل من المنطقات فيه حدماً أصغر من أى منطق معين ، فالفصل الناتج (٤) (وحدوده أكبر من بعض ى) سيشتمل على كل منطق ، فيكون بذلك العدد الحقيقى اللانهاية . وهكذا يمكن إدخال كلا الصفر واللانهاية كحدين متطرفين بين الأعداد الحقيقية . ولكن ليس أى منهما قطعة حسب التعريف .

٢٦٦ ــ يمكن تعريف قطعة معينة بفصول مختلفة كثيرة من المنطقات . وليكن الفصلان ى ، ى ف لهما هذه القطعة كقطعة مشتركة . ويعرف الفصلان بالاجتماعيان ى ، ى ف فى نفس القطعة الدنيا ، شرط أنه إذا علم أى ى فكان هناك ى ف ما أكبر منه ، وإذا علم أى ى ف فهناك ى ما أكبر منه . وإذا لم يكن لكل فصل حد أكبر ، فهناك أيضاً شرط ضرورى . عندئذ نطلق على الفصلين ى ، ى ف ما سماه كانتور صفة التماسك (zusammengehörung) coherent . ويمكن أن نبين بصرف النظر عن القطع أن علاقة التماسك متماثلة ومتعدية[١] . ومن ثم يجب أن نستنتج بمبدإ التجريد أن كليهما له مع حد ثالث ما علاقة مشتركة ليست لأى حد آخر . هذا الحد الثالث كما رأينا من المناقشة السابقة يمكن أن يؤخذ على أنه القطعة

---

(١) انظر Cantor, Math. Annalen, XLVI, and Rivista di Matematica, V, pp. 158-159.

التي يعرفها كلا الحدين الآخرين . ونستطيع أن نبسط معنى « التماسك » ليشمل الفصلين ى ، ف يعرف أحدهما قطعة عليا والآخر قطعة دنيا ، ويشتملان فيما بينهما على جميع المنطقات باستثناء منطق واحد على الأكثر . ولا تزال ملاحظات شبيهة بذلك تنطبق بالضرورة على هذه الحالة .

وإذ قد تبين لنا الآن أن الخواص المعتادة للأعداد الحقيقية تنتمي لقطع المنطقات ، فلا يوجد ثمة سبب رياضي للتمييز بين مثل هذه القطع وبين الأعداد الحقيقية . ويبقى أن نبحث عن طبيعة النهاية أولا ، ثم عن نظريات اللامنطقات الجارية ، ثم بعد ذلك عن الاعتراضات التي تجعل النظرية المذكورة سابقاً تبدو مفضلة .

الملحوظة : النظرية السابقة من المفروض أن مقالة بيانو المشار إليها قبلا شاملة لها [1] .

وقد اهتديت إلى هذه النظرية التي أتحدث بها من هذه المقالة ومن كتاب Formulaire de Mathématique . وفي هذه المقالة نجد تعاريف متفرقة عن الأعداد الحقيقية (الفقرة ٢ رقم ٥) وعن القطع (الفقرة ٨ ـ ٠) بحملنا نعتقد أنهما متميزان . ولكننا بعد تعريف القطع نجد الملاحظة التالية (صفحة ١٣٣) : « والقطع بهذا التعريف إنما تختلف في التسمية عن الأعداد الحقيقية » . ويشرع بيانو أولا في إعطاء أسباب فنية بحتة للتمييز بين الاثنين بطريقة العلامات notation ، وهي أن جمع الأعداد الحقيقية وطرحها وغير ذلك لابد أن يجرى بطريقة مختلفة عن عمليات شبيهة يجب أن تطبق على القطع . ومن هنا يظهر أن وجهة النظر بأسرها التي دافعت عنها متضمنة في هذه المقالة . ولكنها في الوقت نفسه تفتقد بعض الوضوح ما دام يظهر من تعريف الأعداد الحقيقية أنها تعتبر نهايات فصول المنطقات ، على حين أن القطعة ليست بأي معنى نهاية فصل من المنطقات . وأيضاً فلم يذكر في أي مكان ـ الواقع أنه بمقتضى تعريف الأعداد الحقيقية فلابد من استنباط الأمر المقابل ـ أنه لا عدد حقيقي يمكن أن يكون منطقاً . ولا منطق يمكن أن يكون عدداً حقيقياً . وهذا يظهر حيث يبين (ص ١٣٤) أن ١ تختلف عن الكسور الصحيحة . (وليست هذه هي الحالة بالنسبة للعدد الحقيقي ١ حيث

---

(1) "Sui Numeri Irrazionali", Rivista di Matematica, VI, pp. 126-140.

يتميز عن كل من العدد الصحيح ١ وعن العدد المنطق ١ : ١) . أو أننا نقول إن ١ أصغر من $\sqrt{2}$ (وفي هذه الحالة أقول إن ١ يجب أن يفسر على أنه يعني الكسور الصحيحة . فتؤخذ القضية عندئذ بهذا المعنى : الكسور الصحيحة هي بعض لا كل المنطقات التي مربعها أصغر من ٢) . ثم يقول بعد ذلك : « العدد الحقيقي ولو أنه محدد بالقطعة في وتحددها . فإنه يعتبر عادة نهاية القطعة أو طرفها أو حدها الأعلى » . مع أنه لا سبب لافتراض أن القطع التي ليس لها نهاية منطقة لها نهاية على الإطلاق . وهكذا ولو أنه يعترف بإمكان إقامة نظرية كاملة عن اللامنطقات بواسطة القطع فيبدو أنه لا يدرك الأسباب (التي سنقدمها في الباب التالي) التي من أجلها يجب أن نفعل ذلك . وهي أسباب أدنى في الواقع إلى أن تكون فلسفية منها إلى أن تكون رياضية .

الباب الرابع والثلاثون

النهايات والأعداد اللامنطقة

٢٦٢ — يعتمد البحث الرياضي في الانتهاء اعتماداً كلياً على نظرية النهايات. وقد ظن بعض الرياضيين وبعض الفلاسفة أن هذه النظرية قد بطلت بظهور الحساب اللامتناهي الذي أثبت أن اللامتناهيات الصغر الحقيقية مفروضة قبلاً في النهايات[1]. ولكن الرياضيات الحديثة قد بينت قطعاً فيما يبدو لي خطأ مثل هذا الرأي، وبرزت طريقة النهايات أكثر فأكثر باعتبار أنها أساسية. وفي هذا الباب سأعرض أولاً التعريف العام للنهاية، ثم أفحص في أمر تطبيقها على إيجاد اللامنطقات.

عرفنا المتسلسلة الملتحمة بأنها تلك التي يوجد فيها حد بين أي حدين. ولكن في مثل هذه المتسلسلة من الممكن دائماً وجود فصلين من الحدود ليس هناك حد يقع بينهما، ومن الممكن دائماً رد أحد هذين الفصلين إلى حد مفرد. مثال ذلك إذا كانت ع العلاقة المولدة، ص أي حد من المتسلسلة، كان فصل الحدود الذي له مع ص العلاقة ع فصلاً ليس بينه وبين ص أي حد[2]. وفصل الحدود المعرّف على هذا النحو هو أحد القطعتين اللتين تعينهما ص. وفكرة القطعة من الأفكار التي إنما تحتاج إلى متسلسلة فقط بوجه عام، وليس من الضروري أن تكون متسلسلة عددية. وفي هذه الحالة إذا كانت المتسلسلة ملتحمة يقال إن ص نهاية الفصل، وحين يوجد مثل هذا الحد ص، يقال إن القطعة منتهية. وهكذا فإن كل قطعة منتهية في متسلسلة ملتحمة فحدها المعرف يعد النهاية. ولكن هذا لا يؤلف تعريف النهاية: ولكي نحصل على تعريف عام للنهاية فلنضع أي فصل مشمول في المتسلسلة المتولدة من ع. عندئذ يكون الفصل ى بوجه عام بالنسبة لأي حد ص لا ينتمي إليه منقسماً إلى فصلين، أحدهما الذي لحدوده العلاقة ع مع ص (وسأسميه فصل

---

(١) هذه مثلاً وجهة نظر كوهين Cohen, Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte, Berlin, 1883, See esp. [illegible]

(٢) لنفرض مثلاً [illegible] كل حد من حدوده [illegible] كل من حدود [illegible] المكس [illegible].

المحدود السابق على س) والآخر الذى محدوده مع س العلاقة ى (وصاحبه فصل المحدود اللاحقة لـ س) فإذا كان س نفسه حداً فى ى ، نظرنا إلى جميع حدود ى غير س ، فنجد أنها تنقسم إلى الفصلين المذكورين . ويمكن أن نسميها π ى س ، و $\bar{\pi}$ ى س على التوالى . فإذا كان π ى س بحيث يكون ص أى حد سابق على س ، فهناك حد من π ى س لاحق على ص ، ويقع آخر بين ص ، س ، وعندئذ يكون س نهاية لـ π ى س . وبالمثل إذا كان $\bar{\pi}$ ى س بحيث أنه إذا كان ص أى حد بعد س ، فهناك حد من $\bar{\pi}$ ى س بين س ، ص ، عندئذ يكون س نهاية لـ $\bar{\pi}$ ى س . ونعرف الآن أن س نهاية لـ ى إذا كانت نهاية إما لـ π ى س أو $\bar{\pi}$ ى س . ويجب ملاحظة أن ى قد يكون له نهايات كثيرة ، وأن جميع النهايات معاً تكوّن فصلاً جديداً مشمولاً فى المتسلسلة التى تولدها ى . وهذا هو الفصل (أو بالأحرى أن هذا بتأييد بعض الفروض الأخرى المعنية يصبح الفصل) الذى يسميه كانتور بأنه أول مشتقات الفصل ى

٢٦٣ ــ وقبل أن نمضى فى البحث أكثر من ذلك يحسن التنبيه على بعض ملاحظات عامة ذات صفة أولية عن موضوع النهايات . فأولا النهايات تنتمى عادة لفصول مشمولة فى متسلسلات ملتحمة ــ فصول قد تكون فى الحالات المتطرفة متطابقة مع المتسلسلات الملتحمة المذكورة . وثانياً النهاية قد تنتمى وقد لا تنتمى للفصل ى الذى هى نهاية له . ولكنها تنتمى دائماً لمتسلسلة ما تشتمل على ى . فإذا كانت حداً من حدود ى فهى لا تزال نهاية للفصل المركب من جميع حدود ى ما عدا نفسها . وثالثاً لا فصل يمكن أن يكون له نهاية إلا إذا اشتمل على عدد لا متناه من الحدود . ولنرجع إلى قسمتنا السابقة فنقول . إذا كان ى متناهياً كان π ى س ، $\bar{\pi}$ ى س متناهيين . وبناء على ذلك كل منهما سيكون له حد هو أقرب حد من س ، ولن يقع بين هذا الحد وبين س أى حد من ى ، ومن ثم ليس س نهاية لـ ى ، وما دام س أى حد فى المتسلسلة ، فلن يكون لـ ى أى نهاية على الإطلاق . ومن الشائع إضافة نظرية تذهب إلى أن كل فصل لا متناه بشرط أن تكون جميع حدوده مشمولة بين حدين معينين من المتسلسلة المتولدة عن ى ، فلابد أن يكون له على الأقل نهاية واحدة . ولكن هذه النظرية كما سنبين تحتاج إلى تفسير فى ضوء القطع . وليست كما هى قائمة صحيحة . ورابعاً إذا كان

ى مساوياً مع المتسلسلة الملتحمة كلها المتولدة من ى . إذن كل حد من هذه المتسلسلة نهاية لـ ى . ولا يمكن أن يكون هناك حدود أخرى هي نهايات بالمعنى نفسه ما دامت النهايات إنما عُرِفت بعلاقتها مع هذه المتسلسلات الملتحمة . وللحصول على نهايات أخرى ينبغي أن نعتبر المتسلسلة المتولدة عن ى أنها تكون جزءاً من متسلسلة ملتحمة أخرى — وهي حالة قد تنشأ كما سنرى بعد . على أي حال إذا كانت ى أي متسلسلة ملتحمة فكل حد من ى فهو نهاية لـ ى . أما هل ى له أيضاً نهايات أخرى فأمر يتوقف على ظروف أخرى . وبوجه عام يمكن تعريف النهاية بأنها حد يتلو مباشرة (أو يسبق) فصلاً ما من الحدود المنتمية لمتسلسلة لا متناهية ، دون أن يتلو مباشرة (أو يسبق حسب الأحوال) أي حد واحد من المتسلسلة . وبهذه الطريقة سنجد أن النهايات قد تعرف عموماً في جميع المتسلسلات اللامتناهية التي ليست متواليات كالحال مثلاً في متسلسلات الأعداد الصحيحة المتناهية والمتصاعدة .

٢٦٤ — نستطيع الانتقال الآن إلى بحث النظريات الحسابية المتعددة عن اللامنطقات والتي تعتمد كلها على النهايات . وهي في صورتها المخصوصة التي وضعها لها أصحابها ، سنجد أنها جميعاً تتطلب بديهية تفتقر إلى أدلة سواء من جهة الضرورة الفلسفية أو المناسبة الرياضية . وتوجه إليها اعتراضات منطقية خطيرة ، وتستقل عنها تماماً نظرية الأعداد الحقيقية المبسوطة في الباب السابق .

لم نستطع بحث النظريات الحسابية عن اللامنطقات في الجزء الثاني ما دامت تعتمد أساساً على فكرة الترتيب . ولا تصبح الأعداد إلا بواسطتها متصلة بالمعنى المتداول الآن بين الرياضيين . وسنرى في الجزء السادس أننا لا نحتاج إلى أي معنى آخر من الاتصال في بحث المكان والزمان . ومن المهم جداً أن نتبين الأسباب المنطقية التي من أجلها تكون النظرية الحسابية عن اللامنطقات ضرورية حتماً . وكان تعريف اللامنطقات في الماضي غامضاً في العادة لاعتبارات هندسية . وقد كان ذلك الإجراء منافياً للمنطق إلى حد كبير ، لأنه إذا وجب أن ينتج عن تطبيق الأعداد على المكان شيء خلاف التكرار فلابد أن تعرف الأعداد تعريفاً مستقلاً . وإذا لم يكن ممكناً سوى التعريف الهندسي ، فلن يكون هناك ثمة أشياء

حسابية كما يزعم التعريف تعريفها . والتعريف الجبري الذي أدخلت فيه اللامنطقات كجذور لمعادلات جبرية ليس لها جذور منطقة ، كان عرضة لاعتراضات شبيهة بذلك ، إذ كان لابد من بيان أن مثل هذه المعادلات لها جذور . وفضلا عن ذلك فهذه الطريقة إنما تؤدي إلى ما يسمى بالأعداد الجبرية التي هي تناسب لانهائي الصغر للأعداد الحقيقية ، وليس لها اتصال بحسب المعنى الذي ذهب إليه كانتور ، أو بحسب المعنى المطلوب في الهندسة . وعلى أي حال إذا كان من الممكن دون أي افتراض آخر الانتقال من الحساب إلى التحليل ، من المنطقات إلى اللامنطقات ، فبيان كيفية إجراء هذا العمل يخطو بالمنطق أشواطاً إلى الأمام . إن تعميمات العدد – باستثناء إدخال الأعداد التخيلية التي يجب أن تجري مستقلة – هي كلها نتائج ضرورية للتسليم بأن الأعداد الطبيعية تكوّن متوالية . ففي كل متوالية يكون للحدود نوعان من العلاقات ، نوع يكون الشبيه التام بالأعداد الموجبة والأعداد السالبة ، والثاني بالأعداد المنطقة . والأعداد المنطقة تكون متسلسلة ملتحمة معدودة ، وقطع المتسلسلة الملتحمة المعدودة تكون كما رأينا في الباب السابق متسلسلة متصلة بالمعنى الدقيق . وهكذا كل شيء ينشأ من افتراض المتوالية . ولكن علينا في الباب الحاضر أن نبحث في اللامنطقات من جهة اعتمادها على النهايات ، وبهذا المعنى سنجد أنها لن تنشأ بغير فروض جديد .

وهناك عدة نظريات شبيهة بذلك شيئاً ما عن الأعداد اللامنطقة ، وسأبدأ بعرض نظرية ديديكند(١) .

٢٦٥ – مع أن الأعداد المنطقة هي بحيث يكون دائماً بين كل عددين عدد ثالث ، إلا أن هناك طرقاً كثيرة لتقسيم جميع الأعداد المنطقة إلى فصلين ، بحيث تأتي جميع أعداد فصل منهما بعد جميع أعداد الفصل الآخر ، فلا يقع أي عدد منطق بين الفصلين ، ومع ذلك لا يكون للفصل الأول حد أول ولا يكون للثاني حد أخير . مثال ذلك أن جميع الأعداد المنطقة بغير استثناء يمكن أن تصنف حسب مربعها أهو أكبر أو أصغر من ٢ . وجميع الحدود في كلا الفصلين يمكن تنظيمها في متسلسلة مفردة ، يوجد فيها مقطع معين ، يأتي قبله أحد

(١) Stetigkeit und irrationale Zahlen, 2nd ed., Brunswick, 1892.

الفصلين ويأتي الآخر بعده . ويبدو أن الاتصال يتطلب أن يتوافر حد ما عند المقطع . والعدد الذي يقع بين الفصلين يجب أن يكون عدداً جديداً ما دامت جميع الأعداد القديمة قد صنفت . وهذا العدد الجديد الذي يعرف بموضعه من المتسلسلة هو عدد لامنطق . فإذا أدخلت هذه الأعداد فليس هناك دائماً عدد بين أي عددين فقط . بل هناك عدد بين أي فصلين أحدهما يأتي بأسره بعد الآخر . وليس للأول منهما حد أصغر بينما ليس للثاني حد أكبر . وهكذا يمكننا أن نطبق على الأعداد البديهية التي بها يعرف ديديكند اتصال الخط المستقيم (أنظر المرجع السابق ص ١١) .

« إذا أمكن تقسيم جميع نقط الخط إلى فصلين بحيث تكون كل نقطة من أحدهما على شمال كل نقطة من الفصل الآخر . فهناك نقطة واحدة لا غير يتم بها هذا التقسيم لجميع النقط إلى فصلين . وهذا المقطع من الخط إلى جزأين » .

٢٦٦ — ومع ذلك فبديهية ديديكند هذه ذات عبارة أدت إلى أن تكون غير محكمة ، وتحتاج إلى إصلاح يوحي به اشتقاق الأعداد اللامنطقة . فإذا تقسمت « جميع » نقط خط إلى فصلين ، فلن تنفرد نقطة بالبقاء لتمثل المقطع . وإذا قصد بالنقطة « جميع » استبعاد النقطة التي تمثل المقطع ، فلن تميز البديهية المتسلسلات المتصلة بل تنطبق على السواء على جميع المتسلسلات . مثال ذلك متسلسلة الأعداد الصحيحة . يتبغي إذن أن نأخذ البديهية على أنها تنطبق بالنسبة لتقسيم المذكور لا على جميع نقط الخط ، بل على جميع النقط المكونة لمتسلسلة متحمة ما ، وموزعة على طول الخط ، ولكنها تتكون فقط من قسم من نقط الخط . فإذا أجرينا هذا الإصلاح أصبحت البديهية مقبولة . ولو أمكن من بين حدود المتسلسلة إفراز بعضها لتكوين متسلسلة ملتحمة تتوزع على طول المتسلسلة السابقة ، ولو أمكن دائماً أن تقسم هذه المتسلسلة الجديدة بطريقة ديديكند إلى قسمين لا يقع بينهما أي حد من المتسلسلة الجديدة ، بل حد واحد لا غير من المتسلسلة الأصلية . عندئذ تكون المتسلسلة الأصلية متصلة بحسب المعنى الذي قصده ديديكند من هذه اللفظة . ومع ذلك فالإصلاح يهدم تماماً الوضوح الذاتي الذي عليه وحده اعتمد ديديكند (ص ١١) للبرهنة على بديهيته ، من حيث تطبيقها على الخط المستقيم .

وهناك إصلاح آخر أقل بعض الشيء تعقيداً يمكن إجراؤه ويحقق فيما أظن ما « قصده » ديديكند من تقريره في بديهيته . فقد يمكن القول بأن المتسلسلة متصلة بالمعنى الديديكندى عندما ، وعندما فقط ، يمكن تقسيم « جميع » حدود المتسلسلة بغير استثناء إلى فصلين ، بحيث يسبق « كل » الفصل الأول كل الفصل الثاني ، وعندئذ مهما يكن التقسيم فإما أن يكون للفصل الأول حد أخير أو للفصل الثاني حد أول ، ولا يجتمع هذان الأمران معاً أبداً . وهذا الحد الذي يأتي عند طرف واحد من الفصلين قد يستخدم حينئذ بطريقة ديديكند لتعريف المقطع . وفي المتسلسلات المنفصلة مثل متسلسلة الأعداد الصحيحة يوجد كل من حد أخير في الفصل الأول وحد أول في الفصل الثاني(١) ، على حين أنه في المتسلسلات المندمجة كالمنطقات حيث لا يوجد اتصال فقد يحدث أحياناً (ولو أنه ليس في كل تقسيم محتمل) ألا يكون للفصل الأول حد أخير ، ولا يكون للفصل الأخير حد أول . والبديهية المذكورة سابقاً تستبعد كلا هاتين الحالتين . ولكني لا أستطيع أن أرى أي أثر لموضوع التدليل في مثل هذه البديهية سواء أكانت منطبقة على الأعداد أو على المكان .

٢٦٧ — ولنترك جانباً في الوقت الراهن المشكلة العامة للاتصال ، ولنرجع إلى تعريف ديديكند للأعداد اللامنطقة . وأول سؤال يخطر بالبال هو : بأي حق نفترض وجود مثل هذه الأعداد ؟ وما العلة في افتراض ضرورة وجود موضع بين فصلين أحدهما إلى اليمين تماماً ، وليس لأحدهما حد أصغر ولا للآخر حد أكبر ؟ وليس هذا صحيحاً عن المتسلسلات بوجه عام ما دام كثير من المتسلسلات منفصلة ، وهذا لا يتطلبه طبيعة الترتيب . ثم الاتصال كما رأينا ممكن على بعض المعاني بغيره . فلماذا ينبغي أن نفترض مثل هذا العدد أصلاً ؟ وينبغي أن نتذكر أن المشكلات الجبرية والهندسية والتي تدعو للامنطقات إلى حلها ، لا يجب أن يحسب لها حساب ههنا . والمعادلة س٢ — ٢ = ٠ يجب أن يكون لها جذر كما قيل . لأن س كلما زادت من ٠ إلى ٢ ازدادت س٢ — ٢ ، وتكون أولاً سالبة ثم موجبة .

(١) إذا كانت المتسلسلة تحتوي على جزء صحيح غير متوالية ، فإنه يكون صحيحاً بوجه عام — ولكن لا يجوز استثناء أن الفصل الأول لابد أن يكون له حد أخير .

ولو تغيرت س باستمرار ، فكذلك تتغير س٢ – ٢ . عندئذ يجب أن تأخذ س٢ – ٢ قيمة ٠ في انتقالها من السلب إلى الإيجاب . وقد قيل أيضاً إن قطر المربع الذي طول ضلعه الواحد الصحيح له من الواضح طول مضبوط ومحدود هو س ، وأن هذا الطول يكون بحيث أن س٢ – ٢ = ٠ . ولكن هذه الحجج كانت عاجزة عن بيان أن س هو عدد حقاً . ويمكن كذلك أن نعتبرها مبينة عجز الأعداد عن التعبير عن الجبر والهندسة . وترمى النظرية الراهنة إلى إثبات الوجود الحسابي للامنطقات . وهي في صورتها أفضل من النظريات السابقة . ولكنها يبدو أن تطبيقها يقصر عن صورتها .

ولنفحص بالتفصيل تعريف √٢ بطريقة ديديكند . ومن الحقائق الغريبة أنه مع أن عدداً منطقاً يقع بين أى عددين مفردين متعاقبين ، فقد يمكن أن يعرف فصلان من الأعداد المنطقة بحيث لا يقع أى عدد منطق بينهما . على الرغم من أن جميع حدود فصل واحد أعلى من جميع الفصل الآخر . ومن الواضح أن واحداً على الأقل من هذه الفصول يجب أن يشتمل على عدد لامتناه من الحدود . إذ لو لم يكن الأمر كذلك لأمكننا إفراد اثنين من النوعين المتقابلين المتقاربين ، وندخل بينهما عدداً جديداً ، فيقع هذا العدد الواحد بين الفصلين . وهذا يضاد الفرض . ولكن حين يكون أحد الفصلين لامتناهياً فقد يمكن أن نرتب جميع الحدود أو بعضها في متسلسلة من حدود تقترب باستمرار من الفصل الآخر دون أن تبلغه ، ودون أن يكون لها حد أخير . ولنفترض الآن أن فصلنا اللامتناهي محدود ، عندئذ نحصل على متسلسلة محدودة من الأعداد التي تنتمي كلها لأحد الفصلين ولكنها تقترب باستمرار من الفصل الآخر . وليكن ب عدداً ثابتاً من الفصل الثاني ، عندئذ يكون دائماً بين ان ، ب عدد آخر منطق . ولكن هذا العدد يمكن اختياره من غير الألفات . وليكن ان+١ . وإذا كانت متسلسلة الألفات لامتناهية ، فليس من الضروري أن نحصل بهذه الطريقة على أى عدد ليس منتمياً لمتسلسلة الألفات . وفي تعريف اللامنطقات متسلسلة الباءات لا متناهية كذلك . أضف إلى ذلك أنه إذا كانت الباءات محدودة أيضاً . فأي عدد منطق بين ان ، بم لقيم مناسبة لـ ن ، م . فإما أنه ان+ر أو بم+ع أو أنه

يقع بين ا ن ـ ن وبين ا ن+ى+١ ب . أو بين ب م ا ن وبين ب م + ك + ١ م الواقع ا ن ـ ن تقع دائماً بين ا ن ، ب م . وبخطوات متتابعة لا نحصل على أى حد يقع بين جميع الباءات وجميع الألفات . وعلى الرغم من ذلك فإن كلا الألفات والباءات متقاربة . ولنفرض أن الألفات تتزايد على حين أن الباءات تتناقص ، عندئذ ب ن ـ ا ن ، ب ن ـ ا ن+١ تتناقص باستمرار . إذن ا ن+١ ـ ا ن وهى أصغر من أيهما أصغر من العدد المتناقص باستمرار . وعلاوة على ذلك يتناقص هذا العدد إلى غير حد إذ لو كان ب ن ـ ا ن لها نهاية هى ء ، لوقع العدد ا ن+٢ أخيراً بين الفصلين . وبذلك تصبح ا ن+١ ـ ا ن أخيراً أقل من أى عدد معلوم وهكذا فإن الألفات والباءات متقاربة . ولما كان الفرق بينهما علاوة على ذلك يمكن أن يجعل أصغر من أى عدد معلوم فلهما نفس النهاية إن وجدت ولكن هذه النهاية لا يمكن أن تكون عدداً منطقاً ما دامت تقع بين جميع الألفات وجميع الباءات . ويظهر أن هذه هى الحجة لوجود اللامنطقات . مثال ذلك إذا كان .

$$س = \sqrt{٢} + ١ \text{ ، } س^{٢} - ٢ س - ١ = ٠$$

$$\therefore س = ٢ + \frac{١}{س} \text{ ، } ... \text{ و } س = ١ + \frac{١}{٢+} \frac{١}{٢+} \frac{١}{...} = \text{ إلخ } ...$$

والآيلات convergents المتتالية للكسر المتصل $١ + \frac{١}{٢+} \frac{١}{٢+} \frac{١}{٢+} ...$ هى بحيث أن جميع الآيلات الفردية أصغر من جميع الآيلات الزوجية ، فى الوقت الذى تتزايد فيه الآيلات الفردية باستمرار وتتناقص الزوجية باستمرار . وعلاوة على ذلك يتناقص باستمرار الفرق بين الآيلة الفردية والآيلة الزوجية التى تليها . وهكذا فإن كلا المتسلسلتين إذا كان لهما نهاية فلهما نفس النهاية . وهذه النهاية تعرف بأنها $\sqrt{٢}$

ولكن وجود نهاية فى هذه الحالة ليس بواضح أنه افتراض بحت . فقد رأينا فى استهلال هذا الباب أن وجود نهاية يتطلب متسلسلة أكبر تكون النهاية جزءاً منها . فأن تبتدع النهاية بواسطة المتسلسلة التى علينا إيجاد نهايتها فهو إذن خطأ منطقى . هذا ومن الضرورى أن تتناقص المسافة من النهاية إلى ما لا نهاية له . ولكن ههنا مسافة الحدود المتعاقبة هى التى إنما يُعْرَف من أمرها أنها تتناقص بدون حد .

وفضلاً عن ذلك جميع الألفات أصغر من ب ن . ومن ثم تفوق باستمرار شيئاً فشيئاً من ب ن . ولكن مهما تكن ن ، فلا يمكن أن تكون ب ن نهاية الألفات ، لأن ب ن+١ تقع بين ب ن وجميع الألفات . وهذا لا يمكن أن يثبت وجود النهاية بل يثبت فقط إنها إن وجدت ، فلا تكون أحد الألفات أو الباءات ولا أي عدد آخر منطق . وهكذا لا يقوم برهان على وجود اللامنطقات ، بل يمكن فقط أن تكون أوهاماً Fictions مناسبة لوصف علاقات الألفات والباءات .

٢٦٨ – ونظرية فايرشتراس عن اللامنطقات تشبه بعض الشيء نظرية ديديكند . ففي نظرية فايرشتراس عندنا متسلسلة من الحدود ا ، ا ، ... ا ن ، بحيث أن ∑ ا ن لجميع قيم ن أصغر من عدد ما معلوم . وهذه الحالة نصادفها مثلاً في الكسر العشري اللامتناهي . فالكسر ... ٣٫١٤١٥٩ مهما يكن عدد الحدود التي نأخذها يبقى أقل من ٣٫١٤١٦ . وفي هذه الطريقة ليست النهاية كما يبين كانتور[1] ناشئة عن الجمع summation ، بل يجب أن يفرض وجودها من قبل لكي يمكن أن نعرف ∑ بواسطتها . وهذا هو نفس ما وجدناه في نظرية ديديكند : أن متسلسلات الأعداد المنطقة لا يمكن أن تثبت وجود الأعداد اللامنطقة على أنها نهاياتها ، ولكن إنما يمكن أن تثبت فقط ، أنه إذا ما كانت هناك نهاية ، فلابد أن تكون لا منطقة .

وهكذا فإن النظرية الحسابية عن اللامنطقات في أي من الصورتين المذكورتين عرضة للاعتراضات الآتية . (١) لا برهان نحصل عليه منها على وجود شيء آخر خلاف الأعداد المنطقة ، اللهم إلا إذا سلمنا ببديهية عن الاتصال مختلفة عن تلك التي تحققها الأعداد المنطقة ، وليس عندنا أي أساس حتى الآن لقبول هذه البديهية . (٢) وبفرض وجود اللامنطقات فهي إنما تخصص فقط ولا تعرف بمتسلسلة الأعداد المنطقة التي هي نهاياتها . فإذا لم نسلم بوجودها مستقلة تماماً فالمتسلسلة المذكورة لا يمكن أن يعرف لها نهاية . وعلمنا بالعدد اللامنطق الذي هو نهاية ، مفروض قبلاً في البرهان على أنه نهاية . وهكذا ومع أننا دون أن نرجع للهندسة ، فأي عدد لامنطق معلوم يمكن أن يتخصص بواسطة متسلسلة لا متناهية من الأعداد

(١) هذا وفي أسس نظرية عن تخرجي لهما أورد المثال Mannichfaltigkeitslehre, p. ... Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I

المنطقة . إلا أنه لا برهان من الأعداد المنطقة وحدها يمكن إقامته على وجود أعداد لامنطقة أصلا . ويجب أن نبرهن على وجودها من مسلمة جديدة ومستقلة .

واعتراض آخر على النظرية المذكورة هو أنها تفترض أن المنطقات واللامنطقات تكون جزءاً من مسلسلة واحدة بعينها تتولد من علاقتي الأكبر والأصغر . وهذا يثير نفس النوع من الصعوبات التي رأينا أنها تنشأ - في الجزء الثاني - من فكرة أن الأعداد الصحيحة أكبر من المنطقات أو أصغر منها ، أو أن بعض المنطقات أعداد صحاح . حقاً المنطقات في أساسها علاقات بين الأعداد الصحاح ؛ ولكن اللامنطقات ليست هي مثل هذه العلاقات . فإذا أعطينا متسلسلة لا متناهية من المنطقات فقد يمكن أن يوجد عددان صحيحان العلاقة بينهما عدد منطق تحدد المتسلسلة ، أو يمكن ألا يوجد مثل هذا الزوج من العددين الصحيحين . فالشيء الذي فرضناه على أنه النهاية في هذه الحالة الأخيرة لم يعد من نفس النوع كحدود المتسلسلة المفروض أنه يحدها . لأن كلا منها علاقة بين عددين صحيحين على حين أن النهاية ليست كذلك . ومن العسير أن نفترض في مثل هذه الحدود أنها يمكن أن يكون لها علاقتا أكبر وأصغر . الواقع العلاقة المكونة للأكبر والأصغر التي تنشأ منها متسلسلة المنطقات يجب أن تعرف تعريفاً جديداً بالنسبة لحالة اللامنطقين ، أو حالة منطق ولا منطق . وهذا التعريف القائل بأن اللامنطق أكبر من المنطق يستخدم حين يحد اللامنطق متسلسلة تشتمل على حدود أكبر من المنطق المعلوم . ولكن المعلوم ههنا هو علاقة منطق معلوم بفصل من المنطقات ، وبالذات علاقة التبعية لقطعة المعرفة بالمتسلسلة التي نهايتها هي اللامنطق المعلوم . وفي حالة لامنطقين يعرف أحدهما بأنه أكبر من الآخر حين تشتمل متسلسلته المعرفة على حدود أكبر من أي حدود في المتسلسلة المعرفة للآخر - وهو شرط يكافئ قولنا إن القطعة المناظرة لإحداهما تشتمل كجزء صحيح فيها على القطعة المناظرة للأخرى . وهذه التعاريف تعرف علاقة مختلفة كل الاختلاف عن تباين منطقين ، وهي بالذات علاقة الاستغراق المنطقية . وهكذا لا يمكن للامنطقات أن تكون جزءاً من متسلسلة المنطقات ؛ بل لابد من وجود حدود جديدة تناظر المنطقات حتى يمكن أن تنشأ متسلسلة مفردة . ومثل هذه الحدود موجودة كما رأينا في الباب السابق

فى القطع . ولكن نظريتي ديديكند وفايرشتراس تغفل البحث عنها .

٢٦٩ — ونظرية كانتور على الرغم من أنه لم يعرضها فلسفياً بالوضوح الواجب إلا أنها أدنى إلى التأويل الذى أذهب إليه . وترمى بوجه خاص إلى إثبات وجود النهايات . وهو يلاحظ (١) أن وجود النهاية فى نظريته قضية يمكن البرهنة عليها بدقة ، ويؤكد بشدة الخطأ المنطقى الداخل فى محاولة استنتاج وجود النهاية من المتسلسلة التى هى نهاية لها (٢) . ويبدأ كانتور ببحث ما يسميه المتسلسلات الأساسية (وهى نفس ما سميته متواليات) المشمولة فى متسلسلات أكبر . وكل واحدة من هذه المتسلسلات إما أن تكون صاعدة بالكلية أو هابطة بالكلية . ونسمى اثنتان من مثل هذه المتسلسلات متماسكة (Zusammengehörig, coherent) تحت الظروف الآتية :

(١) إذا كان كلاهما صاعداً ، وكان دائماً بعد أى حد من أيهما حد من الآخر .

(٢) إذا كان كلاهما هابطاً ، وكان دائماً قبل أى حد من أيهما حد من الآخر .

(٣) إذا كان أحدهما صاعداً والآخر هابطاً ، وكان أحدهما يسبق بالكلية الآخر ، وكان ، على الأكثر ، حد واحد بين المتسلسلتين الأساسيتين .

وعلاقة التماسك متماثلة وذلك بمقتضى التعريف ، ويبين كانتور أنها متعدية . وفى المقالة التى استخلصنا منها اللاحقات المذكورة يبحث كانتور فى موضوعات أعم بكثير من تعريف اللامنطقات . ولكن الكلام الذى ذكرناه عن المتسلسلات المتماسكة سيعيننا على فهم نظرية اللامنطقات . وهذه النظرية مبسوطة على النحو الآتى فى كتاب Mannichfaltigkeitslehre (ص ٢٣ وما بعدها) .

تُعرَّف المتسلسلة الأساسية من المنطقات بأنها متسلسلة معدودة بحيث إذا عين أى عدد ولكن ε ، فهناك على الأكثر عدد متناه من الحدود فى المتسلسلة تكون

(١) مرجع السابق ص [illegible]

(٢) [illegible] Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I, [illegible]

[illegible] Math. Annalen XLVI, and in Rivista di Matematica, V [illegible] فى الفقرة [illegible]

القيمة المطلقة للفروق بين ان وبين الحدود التالية لها تزيد على ى . بعبارة أخرى إذا علم أي عدد ى مهما يكن صغيراً فأي عددين من المتسلسلة يأتيان معاً بعد حد معين فإنهما فرق يقع بين ى ، - ى . ومثل هذه المتسلسلة لابد أن تكون أحد أنواع ثلاثة : (١) أي عدد ى يذكر فالقيم المطلقة للحدود من حدما فما فوق ستكون كلها أصغر من ى مهما يكن . (٢) من حدما فما فوق جميع الحدود قد تكون أكبر من عدد موجب معين ى . (٣) من حدما فما فوق جميع الحدود قد تكون أصغر من عدد سالب معين - ى . ويعرف العدد الحقيقي وليكن ب بالمتسلسلة الأساسية . فيقال في الحالة الأولى إنه الصفر . وفي الحالة الثانية إنه موجب . وفي الثالثة إنه سالب . والضرب والجمع وغير ذلك لهذه الأعداد الحقيقية الجديدة . نلاحظ أنه إذا كان ان ، ان هي الحدود النونية لمتسلسلتين أساسيتين فالمتسلسلة التي حدها النوني هي ان + ان أو ان - ان أو ان × ان فهي أيضاً متسلسلة أساسية . بينما إذا كان العدد الحقيقي المعرف بالمتسلسلة (ان)[١] ليس الصفر ، فإن (ان ÷ ان) تعرف أيضاً متسلسلة أساسية . وإذا كان ب ، ب هما العددان الحقيقيان المعرفان بالمتسلسلتين (ان) ، (ان) ، فإن الأعداد الحقيقية المعرفة بـ (ان + ان) ، (ان - ان) ، (ان × ان) ، (ان ÷ ان) تعرف على أنها ب + ب ، ب - ب ، ب × ب ، ب ÷ ب بالتوالي . ومن هنا نشرع في تعريف التساوي والأكبر والأصغر بين الأعداد الحقيقية . فنقول :

نعرف أن ب = ب تعني أن ب - ب = ٠ .

ب > ب تعني أن ب - ب موجب .

ب < ب تعني أن ب - ب سالب .

وهذه جميعاً حدود سبق تعريفها . ويلاحظ كذلك أيضاً أن أحد الأعداد في هذه التعاريف قد يكون منطقاً . وربما يبرر ذلك صورياً بملاحظة أن المتسلسلة المحدودة والتي حدودها هي كلها نفس العدد المنطق فهي متسلسلة أساسية حسب التعريف . ومن ثم عندما نضع الفروق ان - ان والتي بها تعرف ب - ب فقد نضع منطقاً مكانه في موضع ان لجميع قيم ن . ولكن لا يترتب على ذلك

(١) تميز (ان) بأنه من متسلسلة كثيرة في عدد من حدودها لا تحتوي الصفر .

أننا نستطيع تعريف ب — ا . وبذلك لنا بأن : ليس ثمة شيء على الإطلاق في التعريف المذكور عن الأعداد الحقيقية يبين أن ا هو العدد الحقيقي المعرف بمتسلسلة أساسية حدودها تساوي جميعاً م . والسبب الوحيد الذي يجعل هذا يبدو الوضوح هو أن التعريف بالنهايات موجود لاشعورياً بحيث يجعلنا نظن أنه ما دام ا من الواضح أنه نهاية متسلسلة حدودها تساوي جميعاً ا ، حينئذ لابد أن يكون ا العدد الحقيقي المعرف بمثل هذه المتسلسلة . ومع ذلك فما دام كانتور يصر — وهو على حق فيما أظن — على أن طريقته مستقلة عن النهايات التي بالعكس يجب أن تستنتج من هذه الطريقة (ص ٢٤ — ٢٥) فلا ينبغي أن نقف طويلاً عند هذه الفكرة السابقة . بل الواقع هذه الفكرة السابقة — إذا لم أكن مخطئاً — باطلة وليس في التعاريف المذكورة من قبل ما يدل على تساوي أو لا تساوي العدد الحقيقي والعدد المنطق ، بل هناك أسباب قوية جداً تجعلنا نفرض عكس ذلك . وكذلك لابد لنا أن نرفض القضية (ص ٢٤) القائلة بأنه إذا كان ب العدد الحقيقي المعرف بمتسلسلة أساسية ($ا_و$) . إذن

نها $ا_و$ = ب

و

ويعد كانتور نفسه مضطراً لافتراضه أن نظريته تجعل هذه القضية قابلة للبرهنة بالدقة . ولكن لا يوجد شيء كما رأينا يدل على أن المنطق يمكن طرحه من العدد الحقيقي . وعلى ذلك فالبرهان المزعوم باطل . أما الصحيح ، والذي له جميع المزايا الرياضية المستمدة من النظرية المذكورة ، فهو هذا : يرتبط بكل منطق ا عدد حقيقي وهو ذلك المعرف بالمتسلسلة الأساسية التي حدودها جميعاً تساوي ا . فإذا كان ب العدد الحقيقي المعرف بمتسلسلة أساسية ($ا_و$) ، وكان $ب_و$ العدد الحقيقي المعرف بمتسلسلة أساسية حدودها جميعاً تساوي $ا_و$ ، إذن ($ب_و$) متسلسلة أساسية لأعداد حقيقية نهايتها ب . غير أننا لا نستطيع أن نستنتج من ذلك كما افترض كانتور (ص ٢٤) أن $ا_و$ موجودة . وهذا يصح فقط في حالة ما إذا كان ($ا_و$) له نهاية منطقة . فالنهاية في متسلسلة من المنطقات إما أنها غير موجودة ، أو أنها منطقة . وفي الحالتين ليست عدداً حقيقياً . ولكن في جميع الأحوال المتسلسلة الأساسية للمنطقات تعرف عدداً حقيقياً ليس متطابقاً البتة مع أي منطق .

٢٧٠ – ولنلخص الآن ما قيل عن نظرية كانتور : بعد أن أثبت كانتور أن متسلسلتين أساسيتين قد يكون لهما علاقة التماسك ، وأن هذه العلاقة متماثلة متعدية ، بين كانتور استناداً إلى مبدأ التجريد (المفروض ضمناً) أن كلا هاتين المتسلسلتين لهما علاقة واحدة مُنا مع عدد واحد ثالث لا غير . وهذا العدد إن قامت المتسلسلة على منطقات تعرفه بأنه العدد الحقيقي الذي تحدده كلتاهما . وعندئذ يمكننا تعريف قواعد العمليات في الأعداد الحقيقية ، وعلاقات التساوي والأكبر والأصغر بينها . غير أن مبدأ التجريد يلقي بنا في غياهب الشك من أمر الأعداد الحقيقية ما هي في الحقيقة . باستثناء أمر واحد هو الذي يبدو يقينياً ، أنها لا تكون جزءاً من أية متسلسلة تشتمل على منطقات ، لأن المنطقات علاقات بين أعداد صحيحة، وليست الأعداد الحقيقية كذلك، وعلاقة التكوين التي بمقتضاها تكون المنطقات متسلسلة إنما تعرف فقط بواسطة الأعداد الصحيحة التي تقوم بينها هذه العلاقات ، فلا يمكن أن تقوم نفس العلاقة بين عددين حقيقيين أو بين عدد حقيقي وعدد منطق . وفي ظل هذا الشك عن حقيقة أمر الأعداد الحقيقية ما هي ، نجد أن قطع المنطقات بحسب تعريفها في الباب السابق تحقق جميع المطالب التي أغفلها تعريف كانتور ، وكذلك المشتقة من مبدأ التجريد . وإذن فليس ثمة أساس منطقي للتمييز بين قطع المنطقات وبين الأعداد الحقيقية . وإذا وجب التمييز بينهما ، فلابد أن يكون ذلك بفضل حدس مباشر مثلا ، أو بفضل بديهية جديدة تماماً مثل أن كل متسلسلات المنطقات فلابد أن يكون لها نهاية . وفي هذا القضاء المبرم على التقدم المضطرد للحساب والتحليل من المقدمات الخمس التي ردّها بيانو كافية ، كما يناقض ذلك تماماً روح الذين اخترعوا النظرية الحسابية عن اللامنطقات . على العكس النظرية السابقة لا تحتاج إلى بديهية جديدة ، لأن المنطقات متى كانت موجودة فلا بد من وجود قطع لها . وتخلصنا هذه النظرية مما يبدو رياضياً من تعقيدات لا ضرورة لها ، لأن القطع إذا كانت ستحقق كل ما هو مطلوب من اللامنطقات ، فإن إدخال متسلسلة موازية جديدة لها بالضبط نفس الخواص الرياضية يبدو ترفاً لا نحتاج إليه .

جملة القول : اللامنطق هو بالفعل قطعة من المنطقات التي ليس لها نهاية ؛

على حين أن العدد الحقيقي الذي يتطابق عادة مع العدد المنطقي هو قطع فيه نهاية منطقة . وهذا ينطبق مثلا على العدد الحقيقي المعرف بمتسلسلة أساسية من منطقات جميع حدودها متساوية . وهذه هي النظرية التي بحثناها في الباب السابق . والتي رجعنا إليها مرة أخرى بعد بحث النظريات الشائعة عن اللامنطقات . وينطبق الجزء الأكبر منها على المتسلسلات الملتحمة بوجه عام . ولكن بعض استخدامات المتسلسلات الأساسية تفترض كما سنرى فيما بعد إما القياس العددي للمسافات والامتدادات ، وإما أن تكون المتسلسلة الملتحمة المعدودة مشمولة في متسلسلتنا بطريقة معينة[1] . ومع ذلك فالنظرية بأسرها تنطبق على أي متسلسلة ملتحمة نشأت عن متوالية ، كما تنشأ المنطقات عن الأعداد الصحيحة . والحاصل أننا لا نتطلب في الأعداد أية خاصية سوى أنها تكون متوالية .

---

(١) انظر الباب الخامس التالي

الباب الخامس والثلاثون

أول تعريف للاتصال عند كانتور

٢٧١ - يعتبر الفلاسفة عادة أن فكرة « الاتصال » قاصرة عن التحليل . ولقد قالوا عنها الشيء الكثير بما في ذلك قول هيجل المأثور : « كل شيء منفصل فهو كذلك متصل والعكس بالعكس »[1] . وهذه الملاحظة باعتبار أنها تمثل لعادة هيجل في الجمع بين الأضداد أصبحت مألوفة يكررها جميع أتباعه . حتى إذا رحنا نتقصى ما الذي قصدوه من معنى الاتصال والانفصال وجدنا أنهم قد لاذوا بصمت مطبق ومتصل . شيء واحد فقط هو الذي كان واضحاً ، وهو أنه مهما يكن ما قصدوه فلم يكن أمراً يمت بصلة إلى الرياضيات أو إلى فلسفة المكان والزمان .

وقد اتفقنا مؤقتاً في الباب الأخير من الجزء الثالث على تسمية السلسلة متصلة إذا كان فيها حد بين كل اثنين . وكان ذلك التعريف يرضي ليبنتز[2] عادة ، وربما كان يظن كافياً بوجه عام حتى ظهور اكتشافات كانتور الثورية . وعلى الرغم من ذلك كان هناك سبب للظن قبل كانتور بإمكان رتبة أعلى من الاتصال ، ذلك أنه منذ كشف المقادير غير القابلة للقياس incommensurables في الهندسة — وهو كشف نجد البرهان عليه في الكتاب العاشر عند أقليدس — كان من الراجح أن للمكان اتصالاً من رتبة أعلى من رتبة الأعداد المنطقة التي لها على الرغم من ذلك نوع الاتصال المعروف في الجزء الثالث . والنوع الذي ينتمي إلى الأعداد المنطقة والذي يقوم على وجود حد بين أي حدين قد اتفقنا على تسميته بالالتحام compactness . ولكي أتجنب الخلط لن أعود إلى وصف هذا النوع بالاتصال . أما ذلك النوع الآخر من الاتصال ، والذي رأينا أنه ينتمي للمكان ، فقد بحث

(١) Logic, Wallace's Translation, p. 188. Works, V, p. 201.

(٢) Phil. Werke, Gerhardt's ed. Vol. II, p. 515. But cf. Cassirer, Leibniz' System, Berlin, 1902, p. 183.

كما لاحظ كانتور [1] على أنه نوع من العقيدة الدينية. وكان خالياً من ذلك التحليل التصوري الواجب لفهمه. حقاً ذهبوا وبخاصة الفلاسفة منهم في الغالب إلى بيان أن أي موضوع حاصل على الاتصال، لم يكن قابلاً للتحليل إلى عناصر قولاً صحيحاً. ثم بين كانتور أن هذا الرأي خاطئ بواسطة تعريف دقيق لذلك النوع من الاتصال الذي يجب أن ينتمي للمكان. هذا التعريف إذا وجب أن يكون شارحاً للمكان، فلابد كما قال بحق [2] أن يتم دون رجوع إلى المكان. وبناء على ذلك لا نجد في تعريفه الأخير إلا أفكاراً ترتيبية ذات نوع عام يمكن أن نضرب لها أمثلة كاملة في الحساب. أما البرهان على أن الفكرة المعرفة كذلك هي بالضبط نوع الاتصال التابع للمكان، فيجب أن نؤجله إلى الجزء السادس. وقد أعطى كانتور تعريفه في صورتين: أولهما ليس ترتيبياً بحتاً، ولكنه يتطلب كذلك إما العدد أو المقدار. وبودي في هذا الباب أن أترجم هذا التعريف الأقدم إلى لغة بسيطة وغير فنية بقدر الإمكان. ثم أبين كيف أن المتسلسلات المتصلة بهذا المعنى تحصل في الحساب، وعلى العموم في نظرية أي متوالية كانت. أما التعريف المتأخر فسنبحث عن أمره في الباب التالي.

٢٧٢ — لكي تكون متسلسلة متصلة فلابد أن تمتاز بخاصتين، أن تكون كاملة perfect وأن تكون متماسكة Zusammenhangend, bien enchainée, cohesive [3]. وكلا هذين الحدين معنى فني يحتاج إلى شرح طويل. وسأبدأ بالاصطلاح الثاني.

(١) يقول عنه تكون المتسلسلة متماسكة، أو يكون لها تماسك إذا لم تشتمل على فجوات gaps متناهية. وإليك التعريف الدقيق كما وضعه كانتور: «نسمي ط مجموعة متماسكة من النقط، إذا كان هناك دائماً بين ط، ط' من ط، ولعدد ε معطي من قبل وبالغ الصغر حسب ما نشاء، عدد متناه من النقط $ط_1$، $ط_2$ ... $ط_ن$ وينتمي إلى ط، بحيث تكون المسافات ط $ط_1$، $ط_1$ $ط_2$، $ط_2$ $ط_3$ ... $ط_ن$ ط' هي كلها أصغر من ε» [4]. وهذا الشرط كما سنرى

(١) Acta Math. II, p. [illegible]

(٢) Mannichfaltigkeitslehre, p. 29

(٣) Acta Math. II, p. [illegible]

(٤) Acta Math. II, p. [illegible]; Mannichfaltigkeitslehre, p. [illegible]

[illegible]

Formulaire de Mathématiques, Vol. [illegible], VI, § [illegible] No. 22.

صلة جوهرية بالمسافة . ومن الضروري أن تشتمل المجموعة المذكورة على أعداد ، لا أن يجب أن يكون عدداً . فكل ما هو لازم هو أن تكون المجموعة متسلسلة فيها مسافات تحقق بديهية أرشميدس وليس لها حد أصغر . وأن يكون ، مسافة تحكمية من النوع الذي تقدمه المتسلسلة . فإذا كانت السلسلة هي المجال كله لعلاقة ما لا لامماثلة متعدية . أو إذا كانت كافة الحدود التي لها علاقة معينة لا مماثلة متعدية مع حد معلوم ، فقد يمكن أن نستبدل الامتداد بالمسافة . وحتى إذا كانت المتسلسلة إنما هي جزء فقط من مثل هذه المتسلسلة ، فيمكننا استبدال الامتداد في المتسلسلة التامة التي تكوّن متسلسلتنا جزءاً منها . غير أننا لكي نعطي أي معنى للتماسك فلابد أن يكون عندنا شيء يقاس عددياً . ما مبلغ ضرورة هذا الشرط . وماذا يمكن عمله بغيره ، هذا ما سأبينه فيما بعد . وبواسطة هذا الشرط تصبح مناقشتنا عن الكمية والقياس التي قمنا بها في الجزء الثالث داخلة في مناقشة الاتصال .

وإذا لم تحقق المسافات أو الامتدادات في متسلسلاتنا بديهية أرشميدس ، فمن بينها متسلسلات تعجز عن القياس العددي المتناهي في صيغة بعض متسلسلات أخرى من بينها. وفي هذه الحالة لا يوجد تماثل analogy من النوع المطلوب لا مع الأعداد المنطقة ولا مع الأعداد الحقيقية . ولا تكون المتسلسلة بالضرورة متماسكة . وليكن و ، د مسافتين . ولنفرض أنهما لأي عدد متناه ن ، ن و أصغر من د . في هذه الحالة إذا كانت و المسافة ، وكانت د المسافة ط طَ ، فمن الواضح أن شرط التماسك لا يمكن أن يتحقق . ومثل هذه الحالات تقع بالفعل . ويمكن أن تنشأ — ما يبدو متناقضاً — بمجرد استكمال الحدود في متسلسلة متماسكة معينة . مثال ذلك أن متسلسلة قطع المنطقات متماسكة . وحين يكون لهذه القطع نهايات منطقة ، فلا تكون النهايات داخلة فيها . ولنضف الآن إلى المتسلسلة ما يمكن أن نسميه بالقطاعات المكملة completed . أي القطع التي لها نهايات منطقة مأخوذة مع نهاياتها . فهذه حدود جديدة تكوّن جزءاً من نفس المتسلسلة ما دام لها علاقة التكامل والجزء مع الحدود السابقة . فالفرق الآن بين القطعة وبين القطعة المكملة المناظرة لها يتألف من منطق مفرد . على حين أن جميع الفروق الأخرى في المتسلسلة تتألف من عدد لامتناه من المنطقات . ومن ثم تبطل بديهية أرشميدس ،

ولا تكون المتسلسلة الجديدة متماسكة .

أما الشرط القائل بأن المسافات في المتسلسلات ليس لها حد أصغر فتحققه الأعداد الحقيقية أو المنطقة . ومن الضروري هنا وجوب أن يعد التماسك ليشمل المتسلسلات غير العددية . أن تكون هناك، حين نختار أي وحدة من المسافة ، مسافات قياسها العددي أصغر من ε ، حيث ε أي عدد منطقي . لأنه إذا وجدت مسافة صغرى فلا يمكن أن نجعل مسافاتنا ط ، ط١ ، ط٢ .... أصغر من هذه المسافة الصغرى ، مما يناقض تعريف التماسك . هذا ولا يجب فقط أن يوجد نهاية صغرى للمسافات عموماً ، بل يجب ألا يوجد نهاية صغرى للمسافات من أي حد معلوم ؛ ومن ثم كل متسلسلة متماسكة cohesive يجب أن تكون ملتحمة compact ، أي يجب أن يكون لها حد بين أي حدين .

ومع ذلك لا ينبغي أن نفترض أن كل متسلسلة ملتحمة فهي متماسكة . انظر مثلاً المتسلسلة المكونة من ١ ، ومن ٢ - م/ن ، حيث م ، ن أي عددين صحيحين بحيث يكون م ، ن أصغر من ن . فهناك حد بين أي حدين ، ولكن المسافة من ١ لا يمكن أن تكون أقل من ١ . وهكذا ولو أن المتسلسلة ملتحمة إلا أنها ليست متماسكة . وهذه المتسلسلة مع ذلك ليست تامة - من حيث إنها جزء فقط من متسلسلة المنطقات التي بواسطتها نقاس مسافاتها . وفي المتسلسلة التامة تختلف الشروط بعض الشيء . ولابد لنا من التمييز بين حالتين بحسب وجود مسافات أو عدم وجود مسافات . (١) فإذا كانت هناك مسافات . والمسافات المتساوية لا تناظر الامتدادات المتساوية ، فقد يحدث أنه على الرغم من انتظام المتسلسلة ، فإن المسافات من حد ما لا تصبح أبداً أصغر من مسافة ما متناهية . وهذه الحالة قد تقدمها المقادير إذا سلمنا برأى ميونج من أن مسافة أي مقدار متناه من الصفر فهي دائماً لا متناهية (انظر المرجع السابق ص ٨٤) . وتقدمها الأعداد إذا كنا نقيس المسافات (وهناك أسباب كثيرة لذلك) بلوغاريتم م/ن . وهكذا في هذه الحالة وبالنسبة للمسافات ليست المتسلسلة متماسكة ولو أنها تامة وملتحمة . (ب) وإذا لم تكن هناك مسافات بل امتدادات فقط ، فعندئذ مع فرض بديهية أرشميدس أي امتداد سيكون أصغر من ε لقيمة مناسبة لـ ن ، ومن ثم إذا وصفنا الامتداد

إلى ن من الأجزاء . فجزء على الأقل منها سيكون أصغر من ه . ولكن ليست هناك طريقة لإثبات أن ما كلها يمكن أن تجعل أصغر من ه ، اللهم إلا إذا افترضنا بديهية الخطية (أى أن أى امتداد وليكن د فيمكن قسمته إلى ن من الأجزاء المتساوية) أو إذا افترضت بديهية أعقد ولكنها أعم ، وتنص على أن الامتداد د يمكن قسمته إلى م من الأجزاء كل منها أكبر من $\frac{د}{م+١}$ وأصغر من $\frac{د}{م-١}$ مهما تكن قيمة العدد الصحيح م . وبهذه البديهية وبديهية أرشميدس ، لابد أن تكون المتسلسلة الملتحمة التامة complete متماسكة . ولكن هاتين البديهيتين معاً تجعلان التام فضلا زائداً والالتحام تكراراً . وهكذا نرى أن التماسك يكاد يكون في جميع الأحوال شرطاً متميزاً عن الالتحام . فالالتحام ترتيبي بحت ، على حين أن التماسك له صلة جوهرية بالأعداد أو بشروط القياس العددى . والتماسك يستلزم الالتحام ، ولكن الالتحام لا يستلزم البتة التماسك ، فيما عدا الحالة الوحيدة للمتسلسلات التامة لمتسلسلة اللامنطقات أو الأعداد الحقيقية .

٢٧٣ — (٢) أما شرح المقصود من المتسلسلة الكاملة perfect فأمر أصعب . تكون المتسلسلة كاملة حين تتوافق مع أول مشتقاتها (١) . ولشرح هذا التعريف لابد من فحص فكرة المشتقات derivatives عن المتسلسلة (٢) . وهذا يتطلب منا شرح « نقطة النهاية » limiting-point في المتسلسلة . وبوجه عام حدود المتسلسلة على نوعين . تلك التي يسميها كانتور بالنقط « المنعزلة » isolated ، والتي يسميها « نقط النهاية » . والمتسلسلة المتناهية ذات نقط منعزلة فقط ، والمتسلسلة اللامتناهية يجب أن تحتوي على الأقل نقطة نهاية واحدة ، ولو أن هذه النقطة ليس من الضروري أن تتبع المتسلسلة . ويعرف كانتور نقطة النهاية بأنها حد يكون بحيث أنه في أى فترة تشتمل عليه ، فهناك عدد لا نهاية له من الحدود في المتسلسلة . (المرجع السابق ٣٤٣) . وهو يعطى التعريف في صيغة نقط على خط ، دون أن يكون للتعريف صلة جوهرية بالمكان . وربما كانت نقطة النهاية حداً في المتسلسلة الأصلية ، وربما لم تكن . ويسمى اجتماع assemblage جميع نقط

(١) Acta Math. II, p. 405.

(٢) المرجع نفسه ص ٣٤١ – ٣٤٤

النهاية المشتقة الأولى للمتسلسلة . ويسمى المشتقة الأولى من المشتقة الأولى بالمشتقة الثانية . وهكذا . ويمضى بيانو تعريف المشتقة الأولى لفصل الأعداد الحقيقية كما يأتي : ليكن ى فصل أعداد حقيقية . وليكن س عدداً حقيقياً ؛ وقد يكون أحد الفصل ى وقد لا يكون ، بحيث تكون النهاية الدنيا للقيم المطلقة لفروق س عن حدود ى التي هي غير س صفراً ، عندئذ يكون فصل حدود س تحقق هذا الشرط المشتق الأول من ى(١) . وهذا يطابق فرضاً لتعريف كانتور . إلا أنه يبرز بصراحة أكثر صلة المشتق بالنهايات . فالمتسلسلة إذن تكون كاملة حين تتألف بالضبط من نفس الحدود كمشتقاتها الأولى . أي حين تكون جميع حدودها نقط نهايات ، وتنتمي جميع نقط النهايات إليها .

٢٧٤ ــ أما بالنسبة للمسألة الأخيرة وهي أن جميع نقط النهايات في المتسلسلة يجب أن تنتمي إليها ، فلا مناص لنا من بعض الشرح . خذ مثلاً متسلسلة الأعداد المنطقة . فكل عدد منطق فهو نهاية متسلسلة أعداد منطقة ما ، وحينئذ تكون المنطقات مشموله في مشتقها الأولى . ولكنا قد اتفقنا في الباب السابق بالنسبة لمتسلسلات المنطقات التي ليس لها نهاية منطقة ، على أنه ليس لها نهاية على الإطلاق . وبناء على ذلك جميع متسلسلات المنطقات التي لها نهاية فنهايتها منطقة ، فالمنطقات إذن بمقتضى نص التعريف لابد أن تكون متسلسلة كاملة perfect . ولكن ليس الأمر كذلك . فقد رأينا عند الكلام على اللامنطقات أن كانتور يعتقد ــ وهو اعتقاد اضطررنا إلى اعتباره باطلا ــ أن كل متسلسلة تحقق شروطاً معينة يمكن تسميتها شروط التقريب فلا بد أن يكون لها نهاية . ولذلك يعتبر متسلسلات المنطقات التي ليس لها نهاية منطقة أن لها نهاية لا منطقة . فهي لذلك لها نهاية لا تنتمي لمتسلسلة المنطقات ، وإذن فمتسلسلة المنطقات لا تشتمل على جميع حدود مشتقها الأولى . الواقع المشتق الأول من الأعداد المنطقة من المتفق أنه هو الأعداد الحقيقية . ولكن حين نعتبر الأعداد الحقيقية كقطع من المنطقات يتعذر اتخاذ هذه الوجهة من النظر . وحين نترك النظرية الوجودية

(١) Formulario, Vol. II, No. 3, [illegible] § 71, [illegible] and [illegible]

نهايات فيجب تعديل تعريف كانتور للكمال perfectum (١) . هذا التعديل هو الذي سنقوم بالنظر فيه الآن .

نقول : تكون المتسلسلة كاملة حين تكون جميع نقطها نقط نهايات ، وحين أيضاً تكون أي متسلسلة أفرزت من المتسلسلة الأولى من النوع الذي يعتبر عادة بأنه يعرّف نهاية ، فلهذه المتسلسلة بالفعل نهاية تنتمي للمتسلسلة الأولى . ولكي نجعل هذه العبارة دقيقة لابد أن ننظر في أمر الشروط التي تعتبر معرّفة للنهاية . وهذه الشروط في حالة المتسلسلة المعدودة بسيطة وقد شرحناها من قبل ، ويعبر عنها بما يأتي : إذا فرضنا أي مسافة ε مهما تكن صغيرة ، كانت جميع حدود المتسلسلة بعد حد معين تمكن الحد اليمنى بحيث أي اثنين منها لهما فرق قيمته المطلقة أصغر من ε . هذه العبارة كما سنرى تستدعي إما العدد أو الكمية ، أي أنها ليست ترتيبية بحتة . ومن الحقائق الغريبة أنه ولو أن الشرط المفروض لوجود النهاية لا يمكن بطريقتنا الراهنة التعبير عنه بصيغة ترتيبية بحتة ، ونميز في متسلسلة كانتور الأساسية الخاصة بالمتسلسلة الملتحمة بين التواليات والتراجعات regressions ، بحسب ما يكون للحدود المتقدمة دائماً العلاقة ق مع الحدود المتأخرة ، أو دائماً العلاقة ق̆ (حيث ق هي العلاقة المولدة للمتسلسلة الملتحمة التي تشتمل على التواليات والتراجعات المذكورة) . هذا والمفروض كذلك أن هذه المتسلسلة الملتحمة تامة ، عندئذ يكون الحد س نهاية متوالية ، إذا كان لكل حد في المتوالية العلاقة ق مع س ، وكل حد له العلاقة ق مع س له أيضاً هذه العلاقة مع حدٍّ ما من المتوالية . هذا التعريف كما سنرى ترتيبي بحت . وينطبق تعريف شبيه به على المتراجعة .

ونشرع بعد ذلك في بحث الشروط العادية لوجود نهاية لمتسلسلة غير معدودة . وحين نقبل على بحث المتسلسلات غير المعدودة ، سنجد من غير المناسب أن نتقيد بالمتسلسلات المعدودة ، ولذلك يحسن النظر في أمر المتسلسلات الأخرى حالاً . وهنا بالطبع إذا كانت أي متسلسلة معدودة متضمنة في متسلسلتنا الأكبر تحقق

---

(١) قد نشر كوتيرا مناقشة لهذه الصفة في مجلة Revue de Mét. et de Morale, March 1900, p. 163.

شروط النهاية ، فسيكون هناك تعريف مناظر لنقطة النهاية فى متسلسلتنا الأكبر . ويمكن بالضبط أن نعرف النهاية العليا أو الدنيا لكل متسلسلتنا الأكبر أو جزئها إن وجدت مثل هذه المتسلسلة كما هو الحال فى المتوالية أو المتراجعة . ولكن لا يمكن وضع شروط عامة لوجود نهاية إلا بالرجوع إلى المتسلسلة المعدودة المتضمنة فى متسلسلتنا الأكبر . ومن الملاحظ أن تعريف كانتور لنقطة النهاية يفترض وجود مثل هذه النقطة ، ولا يمكن أن ينقلب إلى تعريف للشروط التى توجد فيها مثل هذه النقط . وهذا يوضح الأهمية العظمى لمسلمة كانتور الأساسية .

وستلقى مع ذلك طريقة القطع بعض الضوء على هذه المسألة . فقد رأينا فى الباب الثالث والثلاثين أن أى فصل من الحدود فى متسلسلة فإنه يعرف قطعة ، وأن هذه القطعة ربما أمكن تعريفها بحد واحد ، وربما لم يمكن فى بعض الأحيان . فإن أمكن تعريفها كذلك كان هذا الحد النهاية العليا للقطعة ، وإذا لم يكن هذا الحد منتمياً للفصل الذى به عرفت القطعة ، كان هذا الحد أيضاً النهاية العليا لذلك الفصل . ولكن عندما لا يكون للقطعة نهاية عليا ، فالفصل الذى عرفت به القطعة لا يكون له أيضاً نهاية عليا . ومع ذلك فى جميع الأحوال — وهذا أحد الفضائل الهامة للقطع — القطعة المعرفة بفصل لامتناه ليس له نهاية عليا فهو النهاية العليا للقطع المعرفة بأعضاء الفصل المتعددة . وبذلك سواء أكان للفصل نهاية عليا أم لم يكن ، فإن القطع التى تعرفها حدوده المتعددة لها دائماً نهاية عليا — بشرط أن يكون للمتسلسلة الملتحمة المتضمنة للفصل حدود تأتى بعد جميع حدود الفصل .

نستطيع الآن ، دون افتراض وجود نهايات فى الأحوال التى لا يمكن البرهنة على وجودها ، أن نبين معنى المتسلسلة المشتملة على مشتقتها الأولى . حين يكون أى فصل من الحدود متضمناً فى متسلسلة ملتحمة ، فالشروط التى يقال عادة إنها تضمن وجود نهاية عليا للفصل ، مع أنها لا تضمن ذلك بالفعل ، إلا أنها تضمن فعلا وجود نهاية عليا لفصل القطع المعرفة بواسطة أعضاء الفصل المتعددة . أما فيما يختص بالنهايات الدنيا فالقضية عينها تصدق عن ذلك الذى سميناه بالقطع العليا . وبناء على ذلك يمكن أن نضع هذا التعريف : يكون الفصل ى من الحدود المكونة لكل المتسلسلة أو جزئها كاملا ، حين يكون كل حد من حدود ى النهاية العليا أو

الدنيا لفصل ما متضمن في ى ، وحين يكون إذا كان ف أى فصل متضمن في ى،
وكان للقطع الدنيا المعرفة بأعضاء ف المتعددة نهاية عليا أو كان للقطع العليا نهاية دنيا كانت قطعة النهاية هذه إحدى تلك القطع التي يمكن تعريفها بحد واحد من ى؛ أي ما حد من ى كنهاية عليا أو دنيا لها على التوالي . وينبغي أن نعترف بأن هذا التعريف أعقد من تعريف كانتور ، غير أنه يخلو من الفرض الذي لا مبرر له وهو وجود النهايات .

ويمكن أن نعيد تعريف الكمال في لغة ربما كانت أقل صعوبة فنقول : إذا علمت أي متسلسلة وأي فصل من الحدود ى متضمن في هذه المتسلسلة ، فهناك قطعة عليا وقطعة دنيا بالناظر لكل حد في ى . وأي مجموعة لا متناهية من الحدود ف نفرزها من ى ، فهناك شروط معينة يقال عادة إنها تضمن أن يكون للفصل ف نهاية عليا من المسلم به أنها قد لا تنتمي إلى ى ولا للمتسلسلة التي تكون ى متضمنة فيها . أما ما تضمنه هذه الشروط فهو أن فصل القطع الدنيا المناظر لـ ف له نهاية عليا . فإذا كانت المتسلسلة كاملة ، كان لـ ف نهاية عليا كلما كان لفصل القطع المناظر نهاية . وهذه النهاية العليا لـ ف هي حد في ى . ويتطلب هذا التعريف للكمال أن يصح ذلك بالنسبة على النهايات العليا والدنيا . وعلى أي فصل ف متضمن في ى .

٢٧٥ ـ ولما كانت مسألة وجود النهايات قد أوجبت التعقيد المذكور ، وكانت على شيء من الأهمية الفلسفية فسأعيد ذكر الحجج التي تقال ضد افتراض وجود النهايات في فصل المتسلسلة التي تنتمي إليها الأعداد المنطقة . حينما تكون متسلسلة غير كاملة ، على حين يكون مشتقها الأول كاملة ، فهاهنا تكون أول مشتقاتها الأول متقدمة منطقياً على تكوينها نفسها . بمعنى آخر بافتراض وجود المتسلسلة الكاملة أولا إذا أمكن أن نبين أنها مشتقة من المتسلسلة غير الكاملة . وقد رأينا فيما قبل أن هذه هي حال الأعداد اللامنطقة الشخصية . ومن السهل أن نبين أن هذا المبدأ عام . فحينما تشتمل المشتقة على حد لا ينتمي إلى المتسلسلة الأصلية ، فذلك الحد هو نهاية متسلسلة معدودة تكون جزءاً متكاملاً من المتسلسلة الأولى . فإذا كانت هذه المتسلسلة ذات النهاية لها الحد العام ان ، إذن – وسنفسح

التعريف في عبارة لاتنطبق فقط على متسلسلة الأعداد ـــ هناك دائماً عدد مُعرَّف م لأي مسافة متخصصة ، مهما تكن صغيرة بحيث إذا كان ىـ أكبر من م فالمسافة بين ابـ و بين ابـ أصغر من ء مهما يكن العدد الصحيح الموجب ن . ومن هذا نستنتج أن المتسلسلة (ابـ) لها نهاية . وأن هذه النهاية في حالات كثيرة لا يمكن أن تنتمي إلى المتسلسلة التي أفرزت منها (ابـ) . ولكن الاستنتاج بوجود نهاية استنتاجٌ مزعزع ، قد يؤيد إما بمعرفة سابقة بالحد الذي هو نهاية ، وإما ببديهية ما تستوجب وجود مثل هذا الحد . وحين يُعرف الحد الذي هو النهاية بطريقة أخرى مستقلة فقد يسهل تبين أنه النهاية . ولكن حين لا يُعرف فلا يمكن أصلا إثبات وجوده اللهم إلا إذا أدخلنا بديهية ما عن الاتصال . وقد أدخل ديديكند مثل هذه البديهية ، غير أننا رأينا أنها غير مرضية . ومبدأ التجريد الذي يدل على أن المتسلسلتين المتماسكتين لهما شيء ما مشترك فتحققه القطع تماماً . وفي بعض الحالات التي من بينها حالة المنطقات يظهر أن العلاقة المكونة للمتسلسلات غير الكاملة لا يمكن أن تقوم بين أي حدين لا ينتميان إلى هذه المتسلسلة بحيث يستحيل أصلا وجود نهايات لا تنتمي إلى المتسلسلة . لأن النهاية لابد أن يكون لها وضع معين في متسلسلة تكون المتسلسلة التي هي نهاية لها جزءاً منها ، وهذا يتطلب علاقة مكوّنة ما لابد أن تكون قادرة على تكوين نسبية وكذلك الحدود المحدودة بالنهاية . الواقع لا يمكن لمتسلسلة تامة مستقلة كالمنطقات أن يكون لها نقط نهايات لا تنتمي إليها . لأنه إذا كانت ع العلاقة المكونة ، وكان للحدين ا ، ب العلاقة ع ، فأي حد ثالث حـ له هذه العلاقة أو عكسها مع ا أو ب وإذن يكون له هذه العلاقة معهما معاً ؛ فإنه ينتمي لعين المتسلسلة مثل ا ، ب . ولكن النهاية إن وجدت فيجب أن يكون لها العلاقة المكونة مع الحدود التي تحددها ، وبذلك يجب أن تنتمي للمتسلسلة التامة التي تنتمي إليها الحدود . يترتب على ذلك أن أي متسلسلة لها بالفعل نقط نهايات لا تنتمي إليها ، فليست إلا جزءاً فقط من متسلسلة تامة ما . والمتسلسلة التامة التي ليست كاملة فهي متسلسلة لا توجد فيها أية النهايات المُعرَّفة بالطريقة العادية بشرط ألا تنتمي النهايات للمتسلسلة . يترتب على ذلك أنه في أي متسلسلة تامة إما أن بعض النهايات المعرفة لا توجد البتة ، وإما أن المتسلسلة تشتمل على مشتقتها الأولى .

ولكي نجعل التحكم في افتراض وجود النهايات أوضح فلنحاول وضع بديهية اتصال أقل عرضة للنقد من بديهية ديديكند . وسنرى أنه يمكن إنكارها دون أي خسارة .

حين يقل شيأ فشيأ باستمرار تخالف عدد من أوضاع متسلسلة من المعلوم أنها كلها في جانب واحد من وضع معلوم ، فلابد من وجود (وهكذا تجرى بديهيتنا) وضع مّا تتقارب إليه إلى ما لا نهاية له ، بحيث لا يمكن أن تخصص أي مسافة بأنها تبلغ من الصغر حداً أن تكون المسافات الأخرى أقرب من هذا الوضع بهذه المسافة . فإذا سلمنا بهذه البديهية ترتب على ذلك أن جميع المتسلسلات غير الكاملة التي تكون مشتقتها الأولى كاملة تفترض في أساسها هذه المشتقات الأولى ولابد أن تعتبر منتخبات منها . ولنفحص نتائج إنكار بديهيتنا في حالة متسلسلة الأعداد . وفي هذه الحالة ربما نفترض على سبيل المجازفة أن الوضع التالي لجميع الحدود ق ن : ولكنه لا ينتهي إليها ليكن (مثلاً) ق ، حيث ق — ا ن أكبر من ء لقيمة مناسبة ا ، مهما يكن ن . ولكن إذا كانت متسلسلتنا ملتحمة ، فهناك حد بين ق ، ق — ء ، ولنكن ق ً . وبذلك يكون ق ً أقل من ق — ا ن ، مهما تكن قيمة ن . وبذلك يكون ق أقرب إلى جميع الألفات من أقرب ق منها ، مما يخالف الفرض . ولكن الإنكار المذكور لم يكن مباشراً . والواقع من أنه كان يبدو صحيحاً بوضع المغالطات التي يصعب تجنبها في هذا الموضوع . وهذه هي البديهية : هناك حد تقترب منه الألفات حسب ما نشاء . وهذا هو الإنكار : هناك حد أقرب ما يكون إلى الألفات ولكنه على مسافة متناهية . وكان ينبغي أن يكون الإنكار كالآتي : ليس هناك حد تقترب منه الألفات حسب ما نشاء . بعبارة أخرى مهما يكن الحد الذي نخصصه ، ولنكن ق ، فهناك مسافة متناهية مّا ء بحيث يكون ق — ا ن أكبر من ء ، مهما يكن ا ن . وهذا صحيح في حالة متسلسلة الأعداد المنطقة التي ليس لها نهاية منطقة . وفي هذه الحالة ليس هناك حد أقرب إلى الألفات ، ولكن على مسافة متناهية ومهما يكن الحد الذي نخصصه وراء الألفات (فيما عدا حيث يكون للمتسلسلة نهاية منطقة) فلا حد من الألفات يقترب أقربيه إلى هذا الحد من مسافة مّا متناهية . فكل حد وراء الألفات أبعد من مسافة مّا متناهية عنها كلها ، ولكن ليس هناك مسافة متناهية كل حد وراء الألفات

يتجاوزها . وإدخال اللامنطقات يدخل التماثل في هذه الحالة الغريبة من الأمور بحيث يكون هناك حد تقترب منه الألفات إلى ما لا نهاية له ، وكذلك متسلسلة من الحدود تقترب إلى ما لا نهاية له من الأبامات . وحين لا نسمح باللامنطقات ، إذا كان عندنا حد ق يعد جميع الألفات . ومسافة صغيرة ، إذن إذا تخصصت ، أمكن انتخاب ب بحيث يكون ق – ا ب أصغر من ، مهما يكن له . ولكن إذا تخصصت ق ، أمكن دائماً زيادة المسافة ، (فيما عدا إذا كانت النهاية منطقة) بحيث يكون ق – ا ب أكبر من ، مهما يكن ب . وهذه الحالة ولو أنها غريبة إلا أنها غير متناقضة . والتسليم باللامنطقات باعتبار أنها تقابل القطع يكون بذلك غير ضروري منطقياً . ولما كان هذا التسليم أيضاً زائداً عن الحاجة رياضياً ، وقاضياً القضاء المبرم على نظرية المتعقات ، فليس ثمة سبب لصالحها ، بل هناك أسباب قوية لرفضها . فخلاصة القول أي بديهية تهدف إلى بيان وجود النهايات في الأحوال التي لا يمكن بغير ذلك تبيين وجودها فلابد من رفضها . ويجب تعديل تعريف كانتور عن الكمال بحسب ما ذكرناه . وسنعتبر هذه النتيجة في المستقبل كأنها مقررة .

بعد تحليل تعريف كانتور الأقدم للاتصال ، سأشرع في فحص تعريفه الترتيبي الذي وضعه فيما بعد ، وأبحث في تطبيق أجزائه المتعددة على متسلسلات أعم من متسلسلات الأعداد ، مبيناً أين أمكن النقط الصحيحة التي تحتاج إليها هذه الأجزاء المتعددة .

الباب السادس والثلاثون

الاتصال الترتيبي [1]

٢٧٦ – تعريف الاتصال الذي بحثناه في الباب السابق لم يكن كما رأينا ترتيبيا بحتاً ، إذ تطلب على الأقل في تقطين شيئاً من الصلة إما بالأعداد وإما بالمقادير التي تقاس عددياً . وعلى الرغم من ذلك يبدو الاتصال كأنه فكرة ترتيبية بحتة ، وهذا ما أدى كانتور إلى وضع تعريف يخلو من جميع العناصر الغريبة عن الترتيب [2] وسأبحث الآن هذا التعريف كما سأبحث غيره مما عسى أن يوحي به الكلام . وسنجد أنه ما دامت كل صلة بالعدد والكمية قد استبعدت فهناك نظريات على جانب عظيم من الأهمية ، وبخاصة بالنسبة للمتسلسلات الأساسية ، تظل غير قابلة للبرهان حتى مع وجود أي تعريف ترتيبي ما عدا تعريف كانتور ، وهي في أكبر الظن باطلة أحياناً [3] . وهذه حقيقة تُظهر مزايا تعريف كانتور الذي سنذكره الآن .

٢٧٧ – يعرف كانتور التواصل continuum في مقالته المتأخرة كما يأتي :

يبدأ من (بند ٩) صنف المتسلسلة المتممة من الأعداد المنطقة الأكبر من ٠ والأصغر من ١ بترتيب مقدارها . ونسمي هذا الصنف η والمتسلسلة من هذا الصنف نعرفها بالعلامات الآتية :

(١) أنها معدودة أي إذا اتخذنا حدودها بترتيب مناسب (وهو ما يجب أن يكون مختلفاً عن الترتيب المعطاة فيه) . أمكننا أن نعطيها تناظر واحد بواحد مع الأعداد الصحيحة المتناهية .

(٢) أنه ليس للمتسلسلة حد أول ولا حد أخير .

---

(١) الباب الخامس يحتوي ... والذي بحثه كوتيرا ... 'Sur la définition du Continu'
وفي مواقع ... عن هذه المقالة التي في Revue de Métaphysique et Morale, March 1900
... ذكرته في الباب السابق ... في هذا الباب

(٢) Math. Annalen, XLVI

(٣) البراهين الرياضية ... هذه النظريات التي ... في R. d. M, VII, 9

(٣) يوجد فيها حد بين كل حدين ، أي المتسلسلة ملتحمة (uberall dicht) وعندئذ يبرهن على أن هذه الخصائص الثلاث تعرف تماماً صنف الترتيب المقدم بواسطة المنطقات ، أي هناك تناظر واحد بواحد بين أي متسلسلتين لهما هذه الخواص الثلاث ، بحيث تناظر الحدود الأولى الحدود الأولى ، والحدود الأخيرة الحدود الأخيرة . ويتقرر ذلك باستخدام الاستنباط الرياضي الذي يمكن تطبيقه بفضل هذه الحقيقة ، وهي أن المتسلسلات من هذا الصنف معدودة . وهكذا جميع المتسلسلات المعدودة والتي لا أول لها ولا آخر endless[1] وملتحمة فهي متشابهة ترتيبيا . ونشرع الآن (بند ٦١) في بحث المتسلسلات الأساسية المتضمنة في أي متسلسلة م أحادية البعد one - dimensional . فنبين (كما شرحنا من قبل) المقصود من تسمية متسلسلتين أساسيتين متماسكتين coherent ، ونعطي تعريفاً ترتيبيا لنهاية المتسلسلة الأساسية نعني أنه في حالة المتوالية تأتي النهاية بعد المتسلسلة كلها ولكن كل حد قبل النهاية يأتي قبل حد ما من المتسلسلة . وهناك تعريف مناظر لذلك لنهاية المتراجعة . ونثبت أنه لا يمكن لأي متسلسلة أساسية أن يكون لها أكثر من نهاية واحدة ، وأنه إذا كانت للمتسلسلة الأساسية نهاية ، فهذه أيضاً نهاية جميع المتسلسلات المتماسكة . وكذلك المتسلسلتان الأساسيتان التي تكون إحداهما جزءاً من الأخرى فهما متماسكتان . وأي حد من حدود م الذي هو نهاية متسلسلة ما في م ، يسمى حداً « رئيسياً » principal في م فإذا كانت جميع حدود م رئيسية ، تسمى م « متكثفة في ذاتها » (insichdicht) condensed in itself وإذا كانت كل متسلسلة رئيسية من م لها نهاية في م ، تسمى م « مقفلة » closed (abgeschlossen)[2] .

وإذا كانت م مقفلة ومتكثفة في ذاتها معاً فهي كاملة perfect . وجميع هذه الخواص إذا كانت منتمية لـ م فإنها تنتمي لأي متسلسلة متشابهة ترتيبيا مع م . وبهذه التمهيدات نخلص أخيراً إلى تعريف المتواصل (بند ٦٦) . ليكن صنف المتسلسلة التي إليها تنتمي الأعداد الحقيقية من ٠ إلى ١ ، بما فيها كل من الصفر والواحد . وعندئذ تكون كما نعرف صنفاً كاملاً . ولكن هذا وحده لا يميز :

---

(١) يشرح كانتور لفظة endless بقوله لا أول لها ولا آخر Having neither beginning nor end

(٢) ولا ينبغي الخلط بين هذه وبين المعنى الأول للمقفلة الذي ناقشناه في الفصل الرابع .

إذ لها أكثر من ذلك خاصية الاشتمال فى داخلها على متسلسلة من الصنف ه الذى إليه تنتمى المنطقات ؛ وبحيث يكون بين كل حدين من متسلسلة ه حدود من متسلسلة ه . ويترتب على ذلك التعريف الثانى للمتواصل :

المتواصل م الأحادى البعد هو متسلسلة (١) كاملة (٢) تشتمل فى داخلها على متسلسلة معدودة ل فيها حدود بين أى حدين من م .

وليس من الضرورى فى هذا التعريف إضافة الخواص الأخرى اللازمة لبيان أن ل من طراز ه . لأنه إذا كان ل له حد أول أو أخير كان ذلك هو الحد الأول أو الأخير لمتسلسلة م . وعندئذ يمكن أن نطرحها من ل وتحقق المتسلسلة الباقية الشرط (٢) ولكن دون أن يكون لها حد أول أو أخير . والشرط (٢) مأخوذاً مع الشرط (١) يضمن أن تكون ل متسلسلة ملتحمة . ويبرهن كانتور على أن أى متسلسلة م تحقق الشرطين المذكورين فهى متشابهة ترتيبيا مع المتواصل العددى number-continuum، أى الأعداد الحقيقية من ٠ إلى ١ بما فيها كلا الصفر والواحد . ويترتب على ذلك أن التعريف المذكور يشتمل بالضبط على نفس فصل المتسلسلات مثل التى كان تعريفه الأول يشتمل عليها . إنه لا يقرر أن هذا التعريف الجديد ترتيبى بحت ، وربما كان من المشكوك فيه لأول وهلة أنه كذلك . ولننظر نحن هل هناك أفكار فوق الترتيبية يشتمل التعريف عليها .

٢٧٨ – النقطة الوحيدة التى يمكن أن يثار بشأنها أى شك فهى الخاصة بالشرط أن تكون معدودة . فالقول بأن المجموعة معدودة يدل على أن حدود هذه المجموعة هى جميع حدود متوالية مَّا . وهذه الفكرة إلى هذا الحد ترتيبية بحتة . ولكن فى الحالة المفروضة مثل حالة المنطقات أو أى متسلسلة شبيهة ترتيبياً ، فلا بد أن تكون الحدود المكونة للمتسلسلة قابلة لترتيبين تكوِّن فى أحدهما متسلسلة ملتحمة وفى الآخر متوالية . والكشف عن مجموعة من الحدود القابلة هى لهذين الترتيبين أو ليست قابلة يحتاج بوجه عام إلى شروط غير الشروط الترتيبية . ومع ذلك فالفكرة نفسها ترتيبية بحتة . ونحن نتعرف من تشابه جميع مثل هذه المتسلسلات مع متسلسلة المنطقات (التى إنما تتطلب أفكاراً ترتيبية فقط) أنه لا متسلسلة من مثل هذه المتسلسلات

كاملة . ولكن يبقى أن نبحث هل من الممكن أن نثبت ذلك دون رجوع إلى الخواص الخاصة بالمتعلقات التي تنجم عن كونها متسلسلة . المسافة موجودة فيها . ونحن نعرف في الواقع أنه لا يمكن أن تكون متسلسلة معدودة لها كاملة[1] . ولكننا نحتاج ههنا إلى برهان ترتيبي بحت على هذه النظرية . ومع ذلك فمن السهل إعطاء مثل هذا البرهان . خذ مثلا حدود متسلسلتنا الملتحمة ل المعدودة بالترتيب الذي تكون فيه متوالية ω ولنسمها بهذا الترتيب ى . فإذا بدأنا بهذا الترتيب الذي سنسميه م₁ . فلا بد أن يكون هناك حد يتبع هذا الحد في الترتيب الآخر ل . ثم خذ أول حد مثل م₂ كالحد الثاني في متسلسلة أساسية ف . هذا الحد له عدد متناه من السوابق في المتوالية ى . وإذن فله توال في ل هي أيضاً توال في ى . لأن عدد التوالي في ل هو أبداً لا نهاية له .

ثم خذ أول هذه التوالي المشتركة ، وليكن م₃ كالحد الثالث في متسلسلتنا الأساسية ف . فإذا سرنا في هذا الطريق استطعنا تكوين متسلسلة أساسية صاعدة في ل حدودها لها نفس الترتيب في ى كما هو في ل . هذه المتسلسلة لا يمكن أن يكون لها نهاية في ل ، لأن كل حد مₙ يتلو في ل كل حد يسبقه في ى . إذن أي حد من حدود ل سيتجاوزه حد ما مₙ من متسلسلتنا الأساسية الأساسية ف ، وإذن ليس لهذه المتسلسة الأساسية نهاية في ل . وبناء على ذلك النظرية القائلة بأن المتسلسلة المعدودة والتي لا أول لها ولا آخر لا يمكن أن تكون كاملة هي نظرية ترتيبية بحتة . وحينئذ لن نواجه فيما بعد أي صعوبة ، ويمكننا نظريتنا الأولى عن القطع من تقرير المسألة ببساطة . إذا علمت متسلسلة ل معدودة ولا أول لها ولا آخر وملتحمة ، فاشرع في تكوين جميع القطع المعرفة بالمتسلسلة الأساسية في ل . هذه القطع تكوّن متسلسلة كاملة . وبين أي حدين من متسلسلة القطع يوجد قطعة نهايتها العليا (أو الدنيا) حد من حدود ل . والقطع من هذا النوع والتي يمكن أن نسميها قطعاً منطقة هي متسلسلة من نفس الصنف مثل ل ومتضمنة في متسلسلة القطع كلها بالطريقة المطلوبة . وبذلك يكون التعريف الترتيبي للمتواصل تاماً .

٢٧٩ — لا بد لنا من افتراض أن الاتصال بحسب التعريف المذكور إنما

---

(1) Acta Mathematica, II, p. 409

يمكن أن نضرب له أمثلة في الحساب بالطريق غير المباشر من الأعداد الصحيحة إلى المنطقات ، ومن ثم إلى الأعداد الحقيقية . وعلى العكس الأعداد الصحيحة نفسها يمكن أن نجعلها توضح الاتصال . ولنعتبر جميع فصول الأعداد الصحيحة اللامتناهية الممكنة ، ولنرتبها بالطريقة الآتية .

إذا علم فصلان ي ، ف وكان أصغر عدد في ي أصغر من أصغر عدد في ف فإن ي يأتي أولاً . فإذا كانت الحدود النونية الأولى في ي ، ف متطابقة ، إلا أن الحد الذي ترتيبه ن + ١ في كل منهما يختلف عن الآخر ، فإن الذي فيه الحد النوني + ١ أصغر يأتي أولاً . وهذه المتسلسلة لها حد أول وهو فصل الأعداد الصحيحة كله ، ولكن ليس لها حد أخير . ومع ذلك فأي قطعة محكمة completed من المتسلسلة فهي متسلسلة متصلة ، كما يستطيع القارئ أن يتبينه بسهولة لنفسه . والمتسلسلة المتلاحمة المعدودة المتضمنة فيها مكونة من تلك الفصول اللامتناهية التي تشتمل على جميع الأعداد الأكبر من عدد ما ، أي تلك التي تشتمل على جميع الأعداد ما خلا عدداً متناهياً من الأعداد . وبذلك تكون فصول الأعداد الصحيحة المتناهية وحدها كافية في توليد متسلسلات متصلة continuous .

٢٨٠ - سنلاحظ أن التعريف المذكور يعتمد على المتواليات . ولما كانت المتواليات هي عين جوهر الانفصال ، فقد يبدو من التناقض أن نحتاج إليها في تعريف الاتصال[١] .

ومهما يكن من شيء لما كان مما لا ريب فيه أن الناس لم يتعودوا أن يضيفوا إلى لفظة الاتصال معنى دقيقاً ، فالتعريف الذي نأخذ به تعريف تحكمي إلى حد ما . فالمتسلسلات التي لها الخواص المذكورة في تعريف كانتور تسمى بوجه عام متصلة ، ولكن ذلك ينطبق أيضاً على كثير من المتسلسلات التي استبعدها التعريف . على أي حال من المفيد البحث ماذا يمكن أن نصنع بالمتسلسلات الملتحمة بدون المتواليات .

---

(١) بين الأستاذ هوايتهد أن التعريف الآتي نفس مكافئ لتعريف كانتور : تكون المتسلسلة متصلة عندما (١) يكون لكل قطعة منها أول ونهاية ويكون ثمة لها حد أول وأخير (٢) المتسلسلة المتلاحمة المعدودة متضمنة في تلك بحيث يوجد حدود من المتسلسلة الواقعة بين أي حدين من متسلسلتنا الأصلية . وفي هذا التعريف لا تدخل المتواليات إلا عند تعريف المتسلسلة المعدودة .

وليكن ى متسلسلة ملتحمة لا أول لها ولا آخر علاقتها المولدة ق ، ولا نعرف عنها شيئاً أكثر من ذلك . عندئذ يمكن بواسطة أي حد أو فصل من الحدود في ى تعريف قطعة في ى . ولنرمز بالرمز ى إلى فصل جميع القطع الدنيا في ى . ويحسن بنا إعادة ما ذكرناه عن القطع الدنيا فنقول : القطعة هي فصل ف من الحدود المتضمنة في ى ، وهو فصل ليس صفراً ، ولا متساوياً مع ى ، وبحيث لا يكون له حد أخير ، وكل حد يسبق ف فهو أحد ف . وإذا كانت الحالة بالعكس ، حين يكون ف ليس له حد أول ، وكل حد يتبع أحد ف فهو أحد ف ، سمي ف قطعة عليا . ومن السهل عندئذ إثبات أن كل قطعة تتكون من جميع الحدود السابقة (أو التالية) عن حد مفرد من ى ، أو على حد متغير من فصل ما من حدود ى ؛ وأن كل حد مفرد ، وكل فصل من الحدود ، يعرف بهذه الطريقة قطعة عليا وقطعة دنيا . إذن إذا كان ف يدل على فصل القطع العليا ، فمن السهل إثبات أن كلا ى ، ف هما مرة أخرى متسلسلتان ملتحمتان لا أول لهما ولا آخر ؛ علاقتهما المولدة هي علاقة الكل أو الجزء . على حين أنه إذا كان ى له طرف أو طرفان فكذلك ى ، ف ، ولو أن حدود الأطراف ليست حسب التعريف قطعاً . فإذا انتقلنا الآن إلى بحث القطع في ى أو ف (ى مثلاً) سنجد أن قطع النهايات المعرفة بأي فصل كان من ى يمكن دائماً أن تعرف بفصل مفرد ى الذي إذا كان الفصل لامتناهياً ولم يكن له حد أخير فهو النهاية العليا للفصل ، والذي يكون في جميع الأحوال حاصل الجمع المنطقي لجميع أعضاء الفصل — وهي أعضاء كما نذكر هي كلها ذاتها فصول متضمنة في ى (١) . يترتب على ذلك أن جميع الفصول المتضمنة في ى ، وليس لها حد أخير ، فلها نهاية عليا في ى . وكذلك (وهذه قضية متميزة) جميع الفصول المتضمنة في ى ، وليس لها حد أول فلها نهاية دنيا في ى فيما عدا الحالة التي تكون فيها النهاية الدنيا هي الصفر المنطقي أو الفصل الصفري . والنهاية الدنيا هي دائماً حاصل الضرب المنطقي لجميع الفصول المكونة

---

(١) تعريف حاصل الجمع المنطقي لأعضاء فصل فصول بصورة لا يدخل فيها التناهي ويرجع فيها أصلاً إلى بيانو . ويجرى التعريف كالآتي : ليكن و فصل فصول . عندئذ حاصل الجمع المنطقي لأعضاء و هو فصل حدود س حيث يوجد فصل ما ينتمي إلى و وينتمي إليه س . انظر Formulaire, Vol. II, Part I (1897) No. 461

للفصل الذي هي نهاية له . وهكذا بإضافة الفصل الصفري إلى ى تضمن أن يكون ى متسلسلة مقفلة . وهناك معنى في قولنا إن ى متكاثفة في ذاتها وهو هذا : كل حد من ى هو النهاية العليا لفصل مختار اختياراً مناسباً متضمن في ى ، لأن كل حد من ى هو النهاية الدنيا لقطع تلك الباءات التي نعرفه . وكل حد في ى هو النهاية الدنيا لفصل تلك الباءات التي هي جزء صحيح منه . ولكن ليس هناك على الإطلاق أي برهان ، على الأقل فيما استطعت أن أتبينه حتى الآن ، على أن كل حد من ى هو النهاية العليا أو الدنيا لمتسلسلة « أساسية » . وليس هناك سبب « أولى » لماذا كانت في أي متسلسلة نهاية أي فصل كذلك دائماً نهاية متسلسلة أساسية . ويبدو في الواقع أن هذه هي مزية متسلسلة من الأصناف التي تنتمي إليها المنطقات والأعداد الحقيقية على التوالي . أما في حالتنا هذه على الأقل فإن متسلسلتنا ولو أنها بالمعنى العام المذكور متكاثفة في ذاتها ، فلا يبدو أن هناك سبباً لافتراض أن حدودها كلها نهايات لمتسلسلات أساسية ، وبهذا المعنى الخاص ربما لا تكون المتسلسلة متكاثفة في ذاتها .

٢٨٦ — من المفيد بحث نتيجة قصر حدود ى على مثل تلك القطع التي يمكن تعريفها بالمتسلسلات الأساسية . وفي هذه الحالة يحسن أن ننظر علاوة على القطع العليا والدنيا إلى متممماتها supplements كما قد تسمى ، والتي سأعطي الآن تعريفها . ولتكن متسلسلة ملتحمة ف متولدة بعلاقة متعدية لا متماثلة ق ، ولتكن ى أي متسلسلة أساسية في ف . فإذا كان للحدود الأولى من ى مع الحدود الأخيرة العلاقة ق ، سمينا ى « متوالية » . وإذا كانت العلاقة ق سمينا ى « متراجعة » . والآن إذا كان و أي فصل اتفق متضمناً في ف ، فإن و يعرف كما رأينا من قبل أربعة فصول أخرى في ف . وهي :

(١) فصل الحدود قبل كل و ، وسأسميه و π

(٢) فصل الحدود بعد كل و ، وسأسميه و $\bar{\pi}$

(٣) فصل الحدود قبل و ما ، وسأسميه π و

(٤) فصل الحدود بعد و ما ، وسأسميه $\bar{\pi}$ و

فالفصلان (٣) ، (٤) القطعتان الدنيا العليا على الترتيب ، والفصلان

(١) ، (٢) متممان أ (٤) ، (٣) على الترتيب ، وسأسميهما قطعتين متممتين supplemental . فإذا كان و له نهاية عليا فهي الحد الأول أ و $\overline{\pi}$ ، وبذلك لا يكون و $\overline{\pi}$ قطعة ما دام لا قطعة عليا لها حد أول . ولكن حين يكون و ليس له نهاية عليا عندئذ و $\overline{\pi}$ قطعة سواء كان و متناهياً أو لامتناهياً وتنطبق ملاحظات شبيهة بتلك على النهايات الدنيا . فإذا كان و له حد أخير ، فهذا الحد لا ينتمي لا إلى π و ولا إلى و $\overline{\pi}$ ، ولكن جميع الحدود الأخرى لها حد أخير لا ينتمي لا إلى π و ولا إلى و $\overline{\pi}$ ، بل جميع الحدود الأخرى في ف تنتمي لفصل أو لآخر . وإذا كان و ليس له حد أخير ، فجميع حدود ف تنتمي إلى π و أو و $\overline{\pi}$.

وتنطبق ملاحظات شبيهة بذلك على و π ، $\overline{\pi}$ و . وبتطبيق هذه التعريفات العامة على حالات المتواليات والمتراجعات ، ستجد أنه بالنسبة للمتوالية الفصلين (٢) ، (٣) فقط مهمين . وللمتراجعة الفصلين (١) ، (٤) فقط . أما السؤال عن المتوالية أين تبدأ ، وعن المتراجعة أين تنتهي فليست له أي أهمية . وإذ كانت المتوالية ليس لها حد أخير ، ولا للمتراجعة حد أول ، فالقطعة المعرفة بأيهما مأخوذة مع متممتها تشتمل على كل حد في ف . أما هل المتواليات والمتراجعات في ف لها نهايات دائماً أو أحياناً ، أو ليست لها نهايات أبداً . فيبدو أنه لا سبيل لمعرفة ذلك من المقدمات الموجودة لدينا . ولم أتمكن من الكشف عن مثال لمتسلسلات متصمتة ليس لها نهايات ألبتة . ولكني عاجز عن إقامة دليل على استحالة مثل هذه الحالة .

فإذا انتقلنا الآن إلى فصول القطع كما انتقلنا من قبل للنظر في الفصل ى ، فعندنا أربعة من مثل هذه الفصول هي :

(١) الفصل ف π وكل حد من حدوده هو الفصل ى π نعرفه متراجعة ما ى ، أي حدود ف التي تأتي قبل جميع حدود متراجعة ما في ف .

(٢) الفصل ف $\overline{\pi}$ المشتمل على جميع فصول ى $\overline{\pi}$ المعرّفة بالمتوالية ى .

(٣) الفصل π ف الذي حدوده هي π ى حيث ى متوالية ما .

(٤) الفصل ف π الذي حدوده هي ى π حيث ى متراجعة ما . وكل من هذه الفصول الأربعة فصل فصول ، لأن حدوده هي فصول متضمنة في ف . وكل

من الأربعة هو بنفسه متسلسلة ملتحمة . وليس ثمة سبيل إلى البرهنة فيما أعلم على أن (١) ، (٣) أو (٢) و (٤) لهما أي حدود مشتركة . وربما كان لكل زوج حد مشترك إذا احتوى ف على متوالية ومراجعة متماسكتين ، وليس له نهاية في ف . ولكن لا سبيل لمعرفة ما إذا كانت هذه الحالة على تنشأ في المتسلسلة ف المعلومة أو لا .

وعند ما نبحث في أمر الفصول الأربعة المعرفة على ذلك النحو أهي متكافئة في ذاتها ، فإننا نحصل على أعجب النتائج . فكل متسلسلة أساسية في أي فصل من الفصول الأربعة لها نهاية ، ولكن ليس من الضروري أن تكون هذه النهاية في المتسلسلة التي تتركب من حدودها . وبالعكس كل حد في كل فصل من الفصول الأربعة فهو نهاية متسلسلة أساسية ، ولكن ليس بالضرورة متسلسلة في نفس الفصل الذي ينتمي إليه حد النهاية . ويمكن تقرير الأمر على النحو الآتي :

كل متوالية $\pi\pi$ في ف أو $\pi\pi$ ف فلها نهاية في $\pi\pi$ ف

كل متوالية $\overline{\pi\pi}$ في ف أو $\overline{\pi\pi}$ ف فلها نهاية في $\overline{\pi\pi}$ ف

كل مراجعة في ف $\pi\pi$ أو $\pi\pi$ ف فلها نهاية في ف $\pi\pi$

كل مراجعة في ف $\overline{\pi\pi}$ أو $\overline{\pi\pi}$ ف فلها نهاية في ف $\overline{\pi\pi}$

كل حد في ف $\pi\pi$ فهو نهاية مراجعة في ف $\pi\pi$ وأخرى في $\pi\pi$ ف

كل حد في ف $\overline{\pi\pi}$ فهو نهاية مراجعة في ف $\pi\pi$ وأخرى في $\overline{\pi\pi}$ ف

كل حد في $\pi\pi$ ف فهو نهاية متوالية في ف $\pi\pi$ وأخرى في $\pi\pi$ ف

كل حد في $\overline{\pi\pi}$ ف فهو نهاية متوالية في ف $\overline{\pi\pi}$ وأخرى في $\overline{\pi\pi}$ ف

ومن ثمّ كان :

ف $\pi\pi$ متطابقاً مع فصل نهايات المراجعات في ف $\pi\pi$ أو $\pi\pi$ ف

ف $\overline{\pi\pi}$ متطابقاً مع فصل نهايات المراجعات في ف $\overline{\pi\pi}$ أو $\overline{\pi\pi}$ ف

$\pi\pi$ ف متطابقاً مع فصل نهايات المتواليات في ف $\pi\pi$ أو $\pi\pi$ ف

$\overline{\pi\pi}$ ف متطابقاً مع فصل نهايات المتواليات في $\overline{\pi\pi}$ ف أو ف $\overline{\pi\pi}$

وهكذا كل فصل من فصول الأربعة له نوع من الكمال من جانب واحد ،

فصلان من الأربعة كاملان من جانب واحد ، والفصلان الآخران من الجانب الآخر . ولكنى لا أستطيع أن أبرهن على أن أى فصل من الأربعة كامل كلية . وربما نحاول الجمع بين ف π ؛ π ف وكذلك بين ف $\bar{\pi}$ ، $\bar{\pi}$ ف ، لأن ف π ، π ف ، مأخوذين معاً ، يكونان متسلسلة واحدة علاقتها المولدة لا تزال علاقة كل وجزء . وهذه المتسلسلة ستكون كاملة وستشتمل على السواء على نهايات متواليات ومتراجعات فى نفسها . ولكن هذه المتسلسلة ربما لا تكون ملتحمة لأنه إذا وجدت أى متوالية ى ومتراجعة ىَ فى ف ، وكلاهما لهما نفس النهاية فى ف (وهى حالة كما نعرف تحصل فى بعض المتسلسلات الملتحمة) ، إذن π ى ، ى $\bar{\pi}$ سيكونان الحدود المتعاقبة للمتسلسلة المكونة من π ف ، ف π معاً ، لأن ىَ π سيشتمل على النهاية المشتركة على حين أن π ى لن يشتمل عليها ، ولكن جميع الحدود الأخرى فى ف ستنتمى إلى كليهما أو لا تنتمى إلى أيهما . ومن ثم إذا كانت متسلسلتنا ملتحمة فلا يمكن أن نبين أنها كاملة . وحين نجعلها كاملة يمكن أن نبين أنها ربما لا تكون ملتحمة . والمتسلسلة التي ليست ملتحمة فيصعب أن تسمى متصلة .

ومع أننا نستطيع أن نثبت فى متسلسلتنا الأصلية الملتحمة ف أن هناك عدداً لامتناهياً من المتواليات المتماسكة مع متوالية معلومة ، وليس لها أى حد مشترك معها ، فلا يمكننا إثبات وجود ولو متراجعة واحدة متماسكة مع متوالية معلومة ، ولا كذلك إثبات أن أى متوالية أو متراجعة فى ف لها نهاية ، أو أن أى حد من حدود ف فهو نهاية متوالية أو متراجعة . لا يمكننا إثبات أن أى متوالية ى ومتوالية ىَ فيهما يجب π ى = ىَ π بل ولا أن π ى ، ىَ π قد لا يختلفان إلا بحد منفرد فقط من حدود ف .

بل ولا يمكننا أخيراً إثبات أن أى متوالية مفردة فى ف π لها نهاية فى ف π ، بقضايا شبيهة بذلك فيما يختص بالفصول الثلاثة الأخرى ف $\bar{\pi}$ ، π ف ، $\bar{\pi}$ ف . على الأقل فإنى عاجز عن اكتشاف أى طريقة لإثبات أى نظرية من هذه النظريات ، ولو أنه عند غياب الأمثلة على بطلان بعضها فلا يظهر من غير المتحمل أنها ربما تقبل البرهنة عليها .

فإذا كان من الواقع — كما يظهر — أننا إذا بدأنا فقط من متسلسلة ملتحمة

كانت أكثر النظريات الجارية لا مبرهنة ، تبين لنا مقدار أهمية اعتماد نظرية كانتور الترتيبية على الشرط القائل بأن المتسلسلة الملتحمة التي تبدأ منها لا بد أن تكون معدودة وحالما نضع هذا الفرض يصبح من السهل إثبات جميع تلك القضايا المذكورة ، التي تصح بالنسبة للصنفين ه ، θ على التوالي . وهذه الحقيقة من الواضح أنها ذات أهمية فلسفية عظيمة ؛ ولزيادة توضيحها قد أطنبت في الكلام عند المتسلسلات الملتحمة المفروض أنها غير معدودة .

٢٨٢ الملاحظة التي أبديناها توًّا من أن متسلسلتين ملتحمتين قد يأتلفان لتكوين متسلسلة واحدة لها أحياناً حدود متعاقبة ، ملاحظة أدنى إلى الغرابة ؛ وتنطبق كذلك على الاتصال بحسب تعريف كانتور له . فقطع المنطقات تكوّن متسلسلة متصلة ، وكذلك القطع المكمَّلة (أي القطع المأخوذة مع نهاياتها) . ولكن الاثنان معاً تكوّنان متسلسلة ليست ملتحمة ولذلك ليست متصلة . ومما يتعارض بكل تأكيد مع الفكرة الجارية عن الاتصال أن المتسلسلة المتصلة تبطل أن تكون كذلك بمجرد إدخال حدود جديدة بين الحدود القديمة ؛ لأن هذا لا بد بحسب الأفكار الجارية أن يجعل متسلسلتنا أكثر اتصالا . قد يقال فلسفياً إن المتسلسلة لا يمكن أن تسمى متصلة إلا إذا كانت « تامة completes » أي تشتمل على حد معين مأخوذ مع جميع الحدود التي لها مع هذا الحد المعين علاقة لا متماثلة متعدية متخصصة أو عكس هذه العلاقة . فإذا أضفنا هذا الشرط فليست متسلسلة قطع المنطقات تامة بالنسبة للعلاقة التي بواسطتها اعتبرناها حتى الآن متولدة ؛ ما دامت لا تتكون من جميع فصول المنطقات التي لها مع قطعة معلومة علاقة الكل والجزء ، والتي يشتمل كل منها على جميع الحدود الأصغر من أي واحد من حدودها ـــ وهذا الشرط متحقق كذلك بواسطة القطع المكمَّلة . ولكن كل متسلسلة فهي تامة بالنسبة لعلاقة مَّا بسيطة أو مركبة . وهذا هو السبب في أن التمام completeness لا يحتاج من وجهة النظر الرياضية أن يذكر في تعريف الاتصال ، ما دام من الممكن دائماً ضمانه باختيار مناسب للعلاقة المولدة .

رأينا الآن ما يقوم عليه تعريف كانتور للاتصال ، ورأينا أنه على حين يمكن أن توجد أمثلة تحقق التعريف في الحساب ، إلا أن التعريف نفسه ترتيبي بحت ـــ

الشيء الوحيد المحتاج إليه هو سلسلة ملتحمة محدودة . وسواء أكان نوع المتسلسلات التي يعرفها كانتور على أنها متصلة مما يظن أنها أكثر الأشياء شبهاً بالمدلول عليه حتى الآن بهذه اللفظة أم لم يكن ، فالتعريف نفسه ، والخطوات المؤدية إليه ، لابد أن نعترف بأنه نصر للتحليل والتعميم .

وقبل الخوض في المسائل الفلسفية المثارة بواسطة المتواصل يحسن أن نتابع عرض أهم نظريات كانتور ، وذلك ببحث نظريته عن الأعداد الأصلية المتصاعدة ، والأعداد والترتيبية . ونحن لم نبحث حتى الآن إلا في إحدى المشكلتين المخصصتين لهذا الجزء ، وهي مشكلة الاتصال . وقد حان الوقت لننظر فيما تقول به الرياضيات عن اللانهاية . فإذا تم لنا ذلك أصبحنا في موقف يجعلنا قادرين على مناقشة المشكلات الفلسفية الأوثق ارتباطاً باللانهاية والاتصال .

الباب السابع والثلاثون

الأصليات المتصاعدة

٢٨٣ – يمكن أن يقال إن النظرية الرياضية للانهاية تكاد تبدأ بكانتور . فالحساب اللانهائي الصغير ، ولو أنه لا يمكن أن يستغني تماماً عن اللانهاية إلا أن صلته به قابلة ما أمكن ، وهو يسعى إلى إخفاء هذه الصلة قبل أن تظهر إلى العيان . أما كانتور فقد ضرب بسياسة النعامة عرض الحائط وأزاح الستار عن الهيكل الحق . كان ذلك الهيكل ، مثل كثير غيره ، معتمداً على الستار الذي يخفيه ، فتبدد في ضوء النور الملقى عليه . ولنترك الاستعارة جانباً ونقول : إن كانتور أنشأ فرعاً جديداً من الرياضيات بين فيه بمحض صحة الاستنباط فقط ، أن المتناقضات المزعومة عن اللانهاية تعتمد كلها على بسط نتائج تشمل اللانهائية ، وهي نتائج ولو أنها يمكن إثباتها فيما يختص بالأعداد المتناهية ، إلا أنها ليست بالضرورة صادقة على جميع الأعداد . وفي هذه النظرية من الضروري أن نبحث الأصليات والترتيبيات كل منهما على حدة ، بل إن خواصهما تتبع من التباعد وهما متصاعدان حداً أكثر مما هما متناهيان . وسأبدأ بالنظر في الأصليات المتصاعدة ، متبعاً في ذلك نفس الترتيب الذي اتبعته من قبل – وهو ترتيب يظهر لي أنه وحده الصحيح فلسفياً[1] .

٢٨٤ – الأصليات المتصاعدة التي تسمى أيضاً « قوى powers » قد تعرّف أولا بحيث تشمل الأصليات المتناهية ، مع ترك التمييز بين المتناهية والمتصاعدة ليبحث فيما بعد . وفي ذلك يعطي كانتور التعريف الآتي[2] :

« نسمي قوة م أو عدده الأصلي تلك الفكرة العامة التي تستنبط بواسطة ملكة التفكير الفعالة عندنا من المجموعة م بالتجريد من طبيعة عناصرها المتعددة ومن الترتيب المعطاة فيه » .

---

(١) علاوة على الترتيب المنشور في Math. Annalen, XLVI, والكتيب المسمى Mannichfaltigkeitslehre

(٢) Math. Annalen, XLVI, § 1

وهذا كما نرى إنما هو مجرد عبارة تدل على ما نتكلم عنه وليس تعريفاً صحيحاً . فهو يفترض من قبل أن كل مجموعة لها مثل تلك الخاصية المذكورة — خاصية يمكن القول إنها مستقلة عن طبيعة حدودها وترتيبها . وربما نضيف إلى ذلك أنها معتمدة فقط على عددها .

الواقع يأخذ كانتور العدد على أنه فكرة أولية primitive ، وأن كل مجموعة لها عدد فهي قضية أولية . ومن أجل ذلك كان مستفاتي إعطاء تخصيص للعدد ليس تعريفاً صوريا .

ومع ذلك فبواسطة مبدأ التجريد يمكن أن نعطي كما رأينا في الجزء الثاني تعريفاً صوريا للأعداد الأصلية . وهذه الطريقة يعطيها كانتور في الأمور الأساسية مباشرة بعد التعريف غير الصوري السابق الذكر . وقد رأينا من قبل أنه إذا أطلق على فصلين أنهما متشابهان ، حين توجد علاقة واحد بواحد تزاوج بين كل حد من الفصل الأول مع حد واحد لا غير من الفصل الثاني ، عندئذ يكون التشابه متماثلا ومتعديا ، ويكون منعكسا لجميع الفصول . وينبغي ملاحظة أن علاقة واحد بواحد يمكن تعريفها دون أي إشارة للعدد كما يأتي : تكون العلاقة علاقة واحد بواحد إذا كان س له العلاقة مع ص ، وكان س' مختلفاً عن س ، وكذلك ص' عن ص : إذن س' لا تكون له العلاقة مع ص ولا س مع ص' . وليس في هذا أي إشارة إلى العدد . ويتبع ذلك أن تعريف التشابه يخلو أيضاً من مثل هذه الإشارة . وما دام التشابه منعكساً ومتعدياً ومتماثلا أمكن تحليله إلى حاصل ضرب علاقة واحد بواحد وعكسها ويدل على الأقل على خاصية مشتركة للفصول المتشابهة . وهذه الخاصية أو إذا كانت هناك عدة خواص ، فواحدة منها يمكن تسميتها العدد الأصلي للفصول المتشابهة وتكون علاقة الكثير بالواحد هي علاقة فصل بعدد حدوده . ولكي نقف عند شيء واحد معين مثل العدد الأصلي لفصل معلوم ، فعلينا أن نطابق بين عدد فصل وبين فصل الفصول كله المتشابه للفصل المعلوم . وهذا الفصل إذا أخذ كشيء مفرد فله — كما يتبين من برهان مبدأ التجريد — جميع الخواص المطلوبة من العدد الأصلي . ومع ذلك فهذه الطريقة معرضة قلب الشك الناجم من التناقض الذي ذكرناه في الباب العاشر من الجزء الأول (١) .

---

(١) انظر الملحق

بهذه الطريقة نحصل على تعريف العدد الأصلى لفصل . وما دام التشابه منعكساً بالنسبة للفصول ، فلكل فصل عدد أصلى . وربما يظن أن هذا التعريف إنما ينطبق على الفصول المتناهية لأننا كى نبرهن على أن « جميع » حدود فصل واحد فهى مترابطة مع جميع حدود فصل آخر ، فقد يظن أن العد التام أمر ضرورى ؛ وليست هذه مع ذلك هى الحالة ، كما يمكن أن نتبين لأول وهلة باستبدال « أى » بدلا من « جميع » — و« أى » لفظة مؤثرة بوجه عام حيث تكون بصدد فصول لامتناهية . ويكون فصلان ى ، ف متشابهين إذا وجدت علاقة ما واحد بواحد ع بحيث إنه إذا كان س أى حد فى ى فهناك حد ما ص فى ف بحيث يكون س ع ص . وإذا كان ص' أى حد فى ف ، فهناك حد ما س' فى ى بحيث يكون س' ع ص' . ولا حاجة لنا ههنا ألبتة إلى العد الكامل بل نحتاج فقط إلى قضايا تختص « بأى ى » و « أى ف » . مثال ذلك أن النقط على خط معلوم تشبه الخطوط التى تمر بنقطة معلومة وتلتقى بالخط المعلوم . لأن « أى » نقطة على الخط المعلوم تحدد خطاً واحداً ولا غير يمر بالنقطة المعلومة . و « أى » خط يمر بالنقطة المعلومة ويلتقى بالخط المعلوم يحدد نقطة واحدة ولا غير على الخط المعلوم . وهكذا حيث تكون فصولاً لامتناهية فإننا نحتاج إلى قضية ما عامة عن « أى » حد فى كل من الفصلين لقيام التشابه . ولكننا لا نحتاج إلى العد . ولكى نثبت أن كل (أو أى) فصل له عدد أصلى ، فإننا نحتاج إلى ملاحظة أن أى حد فى أى فصل فهو متطابق مع نفسه . ولسنا فى حاجة لخاصية انعكاس التشابه إلى أى قضية عامة أخرى عن حدود الفصل .

٢٨٥ — ولنشرع الآن فى بحث الخواص الرئيسية للأعداد الأصلية . ولن أعطى براهين على أى خاصية من هذه الخواص خشية تكرار ما نقلناه عن كانتور . وإذا بحثنا أولا فى علاقاتها بالفصول فقد نلاحظ أنه إذا وجدت مجموعتان من الفصول متشابهة الأزواج ، وليس لأى اثنين من المجموعة الواحدة جزء مشترك ، بل ولا لأى اثنين من المجموعة الأخرى ، إذن حاصل الجمع المنطقى لجميع فصول إحدى المجموعتين يشابه حاصل الجمع المنطقى لجميع فصول المجموعة الأخرى . وهذه القضية المألوفة فى حالة الفصول المتناهية تصح كذلك بالنسبة للفصول اللامتناهية

ثم إن العدد الأصلي للفصل ى يقال إنه أكبر من العدد الأصلي للفصل ف ، حين لا يكون أي جزء من ف مشابهاً ى ، بل هناك جزء من ى يشبه ف . وفي هذه الحالة أيضاً يقال إن عدد ف أقل من عدد ى . ومن الممكن إثبات أنه إذا وجد جزء من ى يشبه جزءاً من ف ، وجزء من ف يشبه جزءاً من ى ، إذن ى ، ف متشابهان[1] . وهكذا نجد أن المساواة والأكبر والأصغر لا يتفق بعضها مع بعضها الآخر ، وهي كلها متعدية ؛ والأخيرتان لا متماثلة . ونحن لا نستطيع إثبات — ويبدو من المشكوك فيه هل يمكننا هذا الإثبات أصلا — أنه إذا اختلف عددان أصليان فلا بد أن يكون أحدهما أكبر والآخر أصغر[2] . وينبغي ملاحظة أن تعريف «أكبر» يشتمل على شرط ليس مطلوباً في حالة الأصليات المتناهية . فإذا كان عدد ف متناهياً ، فيكفي أن يكون جزء مناسب من ى مشابهاً ف . ولكن في الأصليات المتصاعدة ليس هذا بكاف . إذن كلا الجزأين لازمان لإجراء تعريف عام للأكبر

وهنا الفرق بين الأصليات المتناهية والمتصاعدة ينشأ من تعريف الفرق بين المتناهي واللامتناهي ؛ وهو أنه حين لا يكون عدد فصل متناهياً ، فالفصل دائماً جزء صحيح مشابه للفصل كله . وبعبارة أخرى كل فصل لامتناه يشتمل على جزء (يشتمل على عدد لامتناه من الأجزاء) له عين العدد كنفسه . وهناك حالات خاصة معينة لهذه القضية عرفت منذ زمن طويل ، وكانت تعتبر بأنها تكوّن تناقضاً في فكرة العدد اللامتناهي . مثال ذلك أن ليبنتز[3] يذهب إلى أنه ما دام كل عدد يمكن أن يضاعف ، فإن عدد الأعداد هو نفس عدد الأعداد الزوجية ، ويستنتج من ذلك أن العدد اللامتناهي لا وجود له . وأول من عمم هذه الخاصية عن المجموعات اللامتناهية ، وبحث أمرها على أنها غير متناقضة ، فهو بمقدار ما أعلم بولزانو[4] .

---

(١) هذه هي نظرية برنشتين وشرويدر ، وانظر تبرهين Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris, 1898, und Zermelo, Göttinger Nachrichten, 1901, pp. 34–38.

(٢) الأسباب التي يقدمها كانتور على نحو مبهمة ، ولا يبدو لي أنها صحيحة ، وهي تعتمد على المسلمة القائلة بأن كل فصل فهو مجال علاقة ما مرتبة ترتيباً . انظر Cantor, Math. Annalen, vol. XLVI, note on § 2.

(٣) Gerhardt's ed. I, p. 338.

(٤) *Paradoxien des Unendlichen*, § 21.

ولكن البرهان الدقيق على القضية حين تعرف الأصليات المتناهية بواسطة الاستنباط الرياضي ، وكذلك البرهان على أنها غير متناقضة ، إنما يرجع إلى كانتور وديديكند . وقد يمكن أن تؤخذ القضية ذاتها على أنها تعريف لمتصاعد من الأعداد الأصلية ، لأنها خاصية تنتمي لجميعها ولا تنتمي لأي عدد من الأصليات المتناهية[1] وقبل أن نمضي في بحث هذه الخاصية لا بد لنا من الحصول على معرفة أوثق بالخواص الأخرى للأعداد الأصلية .

٢٨٦ — ونصل الآن إلى الخواص الحسابية فقط للأصليات ، نعني جمعها وضربها ، إلخ[2] . ويعرف « جمع » الأعداد ، حين تكون متصاعدة ، بالضبط كما عرفناها في حالة الأعداد المتناهية ، أي بواسطة الجمع المنطقي . إن عدد حاصل الجمع المنطقي لفصلين ليس لهما حد مشترك ، هو مجموع عددي الفصلين . وهذا يمكن أن يمد بخطوات متتالية ليشمل أي عدد متناه من الفصول . لأن العدد اللامتناهي للفصول وهو الذي يكون فصل فصول ، فإن حاصل جمع أعدادها إذا لم يكن لفصلين منها أي حد مشترك لا يزال هو عدد حاصل جمعها المنطقي — ويكون حاصل الجمع المنطقي لأي فصل فصول متناهياً كان أو غير متناه قابلا للتعريف منطقياً . ويستمر قانونا التبادل والترتيب صحيحين بالنسبة لحاصل جمع عددين أو ثلاثة أعداد معرفة على هذا النحو ، أي أننا نحصل على ما يأتي :

ا + ب = ب + ا ، ا + (ب + حـ) = (ا + ب) + حـ

ويعرف كانتور « ضرب » عددين كما يأتي :

إذا كان م ، ن فصلين فيمكننا أن نركب أي عنصر من م مع أي عنصر من ن لتكوين زوج هو (م ، ن) . وعدد جميع مثل هذه الأزواج هو حاصل ضرب أعداد م ، ن . وإذا شئنا تجنب فكرة الزوج في التعريف فيمكن أن نضع بدلا ما يأتي[3] : ليكن ي فصل فصول وعدده ا ، وليكن كل فصل من

---

(١) Dedikend, Was sind und was sollen die Zahlen? No. 64.

(٢) Cantor, Math. Annalen, XLVI, § 3. Whitehead, American Journal of Math. Vol. XXIV. No. 4.

(٣) Vivanti, Théorie des Ensembles, Formulaire de Mathématiques Vol. I, Part VI, § 2, No. 4.

American Journal of Mathematics.

هذه الفصول المنتمية أي تشتمل على ب من الحدود ، بحيث لا يكون لفصلين من هذه الفصول أي حد مشترك ، إذن ا ب هو عدد حاصل الجمع المنطقي لجميع هذه الفصول . وهذا التعريف لا يزال منطقياً بحتاً ويتجنب فكرة الزوج . والضرب معرفاً على هذا النحو يحقق قوانين التبادل والترتيب والتوزيع ، أي أننا نحصل على :

ا ب = ب ا ، ا (ب حـ) = (ا ب) حـ ، ا (ب + حـ) = ا ب + ا حـ .

ومن ثم فجميع الأعداد الأصلية وضربها حتى حين تكون متصاعدة يحققان جميع قواعد الحساب الابتدائية .

وتعريف قوى عدد (ا^ب) يحصل كذلك منطقياً (انظر بند ٤ من المرجع السابق) . ولهذا الغرض يعرف كانتور أولا ما يسميه تغطية covering (Belegung) فصل ق بواسطة فصل آخر م . وبمقتضى هذا القانون يرتبط كل عنصر له من ق بعنصر واحد ولا غير م من م ، ولكن نفس هذا العنصر م قد يرتبط بكثير من عناصر ق . ومعنى ذلك أن التغطية Belegung هي علاقة كثير بواحد ميدانها يشمل ق وبها تترابط دائماً حدود ق مع حدود م . فإذا كان ا عدد الحدود في م ، وكان ب عدد الحدود في ق ، إذن عدد جميع مثل هذه العلاقات من الكثير بالواحد يعرف بأنه ا^ب . ومن السهل أن نتبين أن هذا التعريف بالنسبة للأعداد المتناهية يتفق مع التعريف المعتاد . أما بالنسبة للأعداد المتصاعدة فلا تزال الأسس indices لها الخواص المعتادة أي :

ا^ب ا^حـ = ا^(ب+حـ) ، ا^حـ ب^حـ = (ا ب)^حـ ، (ا^ب)^حـ = ا^(ب حـ)

وفي الحالة التي تكون فيها ا = ٢ ، فإن ا^ب تقبل تعريفاً أبسط مستنبطاً من التعريف المذكور . فإذا كانت ا = ٢ ، كانت ٢^ب عدد الطرق التي يمكن بها أن يتعلق كل حد من حدود ب بواحد من حدين . وعند ما نعلم الحدود المتعلقة بأحد الحدين فإن الباقية تتعلق بالحد الآخر . ومن ثم يكفي في كل حالة تخصيص فصل الحدود المتعلق بأحد الحدين . وبهذا نحصل في كل حالة على فصل نفرزه من حدود ب وفي جميع الأحوال نحصل على جميع مثل هذه الفصول . وإذن ٢^ب هو عدد الفصول التي يمكن أن تنشأ عن حدود ب ، أو عدد توافيق ب من الأشياء مأخوذة أي عدد في أي وقت — وهي نظرية مألوفة عند ما يكون ب متناهياً . وتستمر

صحيحة عند ما يكون ب متصاعداً . ويعطي كانتور برهاناً على أن ٢^ب أكبر دائماً من ب — وهو برهان مع ذلك يفضي إلى صعوبات عند ما يكون ب عدد جميع الفصول ، أو بوجه أعم عند ما تكون هناك مجموعة ما من حدود ب تكون فيها جميع المجموعات المفرزة من حدود ب هي نفسها حدود مفردة من ب[١].

وتعريفات الضرب التي أعطاها كانتور وفايفانتي تتطلب أن يكون عدد العوامل في حاصل الضرب متناهياً ، ويلزم عن ذلك إعطاء تعريف جديد مستقل للقوى إذا أجزنا أن يكون الأس لامتناهياً . وقد أعطى الأستاذ هوايتهيد[٢] تعريفاً للضرب يخلو من هذا القيد ، ويسمح من أجل ذلك للقوى أن تعرّف بالطريقة العادية مثل حاصل الضرب . وقد وجد كذلك براهين من القوانين الصورية حين يكون عدد الأشياء المجموعة أو الأقواس أو العوامل لا متناهياً . ويجري تعريف حاصل الضرب كما يأتي : ليكن ك فصل فصول ليس لأي فصلين منهما حدود مشتركة . ولنفرز لكل طريقة ممكنة حداً واحداً لا غير من كل فصل من الفصول التي يتكون منها ك ، فإذا فعلنا ذلك بجميع الطرق الممكنة حصلنا على فصل فصول يسمى الفصل الضربي آ ك . ويعرف عدد حدود هذا الفصل بأنه حاصل ضرب عدد الحدود في شتى الفصول التي هي أعضاء ك . وحيث يكون عدد أعضاء ك متناهياً من السهل أن نبين أن هذا يتفق مع التعريف العادي . وليكن ى ، ف ، و أعضاء ك ، وليكن حدودها على التوالي هي ه ، ؤ ، ر . إذن يمكن إفراز حد واحد من ى بطرق ه ، ولكل طريق يوجد ؤ من الطرق لإفراز حد واحد من ف ، ولكل طريق لإفراز حد واحد من ى ، وحد واحد من ف يوجد ر من الطرق لإفراز واحد من و . إذن هنالك ه ؤ ر من الطرق لإفراز حد واحد من كل ، حين يفهم الضرب بمعناه المعتاد . والفصل الضربي فكرة هامة بواسطتها يمكن أن يتقدم الحساب الأصلي التصاعدي خطوات أكثر مما تقدم به كانتور .

٢٨٧ — تنطبق جميع التعاريف المذكورة على الأعداد الصحيحة المتناهية

---

(١) انظر فيما بعد الباب الثالث والاربعين .

(٢) المرجع السابق من Acta Mathematica II, pp. 306, 313, 326.

والمتصاعدة على حد سواء ، ولا تزال القوانين الصورية للحساب تصح عليها كما نرى . ومع ذلك فالأعداد الصحيحة المتصاعدة تختلف عن المتناهية في خواص علاقتها بالفصول التي هي أعدادها ، وكذلك بالنسبة لخواص فصول الأعداد الصحيحة ذاتها . الواقع لفصول الأعداد خواص شديدة الاختلاف بحسب ما تكون الأعداد متناهية كلها أو متصاعدة على الأقل جزئياً .

ومن بين الأصليات المتصاعدة بعضها له أهمية خاصة وبوجه خاص الأعداد المتناهية وعدد المتواصل . ومن الواضح أن عدد الأعداد المتناهية ليس هو نفسه عدداً متناهياً ، لأن فصل ، العدد المتناهي ، شبيه بفصل ، العدد المتناهي الزوج ، الذي هو جزء من نفسه . وقد يمكن إثبات نفس النتيجة بالاستنباط الرياضي . وهو مبدأ يستخدم كذلك لتعريف الأعداد المتناهية ، ولكني لن أبحث في أمره إلا في الباب التالي ، لأنه من طبيعة ترتيبية أكثر . عدد الأعداد المتناهية هو إذن متصاعد ، ويرمز كانتور إلى هذا العدد بالألف العبرية مع وضع صفر جانبها ، ولكننا سنرمز له بالألف المعتادة للسهولة ، هكذا ا . ويثبت كانتور أن هذا هو أقل جميع الأصليات المتصاعدة ، وذلك من النظريات الآتية (المرجع السابق بند ٦) .

(ا) كل مجموعة متصاعدة تشتمل على مجموعات أخرى كأجزاء عددها هو ا .

(ب) كل مجموعة متصاعدة هي جزء من أخرى عددها هو ا ، فلها كذلك العدد ا .

(حـ) لا مجموعة متناهية تشبه أي جزء صحيح من ذاتها .

(د) كل مجموعة متصاعدة فهي شبيهة بجزء ما صحيح بذاتها[1] .

ويترتب على هذه النظريات أنه لا عدد متصاعداً أصغر من عدد الأعداد المتناهية . والمجموعات التي لها هذا العدد يقال إنها معدودة ، لأنه من الممكن دائماً أن « تعد » مثل هذه المجموعات . بمعنى أنه إذا علم أي حد في مثل هذه المجموعة فهناك عدد متناه ما ن بحيث يكون الحد المعلوم هو الحد النوني . وليست هذه إلا

---

(١) النظرية د جزء ـ د تحتاج إلى أن يبرهن المتناهي بالاستنباط الرياضي ، وإلا أصبحت مكررة .

مجرد طريقة أخرى للقول بأن جميع حدود المجموعة المعدودة لها علاقة واحد بواحد مع الأعداد المتناهية . وهذا مرة أخرى يكافيء قولنا إن عدد المجموعة هو عين الأعداد المتناهية . ومن السهل أن نرى أن الأعداد الزوجية ، أو الأولية ، أو المربعات الكاملة ، أو أي فصل آخر من الأعداد المتناهية التي ليس لها نهاية عليا تكوّن متسلسلة معدودة ، لأننا إذا رتبنا أي فصل من هذه الفصول بترتيب المقدار فهنالك عدد متناه من الحدود وليكن ن قبل أي حد معلوم سيكون بذلك الحد النوني + ١ . وأهم من ذلك أن جميع المنطقات بل جميع الجذور الحقيقية للمعادلات ذات الدرجة المتناهية والمعادلات المنطقة (أي جميع الأعداد الجبرية) تكوّن متسلسلة معدودة[١] بل إن المتسلسلة النونية البعد لمثل هذه الحدود فهي أيضاً معدودة ، سواء كانت متناهية أو كانت أصغر عدد ترتيبي متصاعد . أما أن الأعداد المنطقة معدودة فمن السهل تبين ذلك بوضعها في ترتيب يكون تلك التي مجموع بسطها ومقامها أصغر قبل تلك التي مجموع بسطها ومقامها أكبر ؛ والتي مجموعها متساو والتي بسطها أصغر قبل التي بسطها أكبر . وبذلك نحصل على المتسلسلة :

١ ، ١/٢ ، ٢ ، ١/٣ ، ٣ ، ١/٤ ، ٢/٣ ، ٣/٢ ، ٤ ، ١/٥ ....

وهذه متسلسلة منفصلة لها بداية وليس لها نهاية . وكل عدد منطق يقع في هذه المتسلسلة ويكون له عدد متناه من السوابق . أما في الحالات الأخرى فالبرهان عسى أن يكون أصعب .

وجميع المتسلسلات المعدودة قلها عين العدد الأصلي ا . مهما يظهر أنها مختلفة . ولكن لا يجب افتراض عدم وجود عدد أكبر من ا . بالعكس توجد متسلسلة لا متناهية من مثل هذه الأعداد[٢] . ويذهب كانتور إلى أن الأصليات المتصاعدة محكمة الترتيب ، أي تكون بحيث أن كل واحد منها ما عدا الأخير (إن كان هنالك عدد أخير) فله تال مباشر ، وبذلك يكون كل فصل منها له أي أعداد مهما تكن بعد ، ولكن ليس لها كلها سابق مباشر . مثال ذلك أن ا نفسه ليس له

---

(١) انظر Acta Mathematica II, pp. 306, 313, 326.

(٢) Jahresbericht der deutschen Mathematiker - Vereinigung I, 1892. Rivista di Matematica, II, pp. 165-7.

أما ما يقوله كانتور من عدم وجود عدد أصلي متصاعد هو الأكبر فموضع مناقشة . انظر فيما بعد الباب الثالث والأربعين .

سابق مباشر ، إذ لو كان له سابق لكان آخر الأعداد المتناهية ، ونحن نعرف أنه ليس هناك عدد متناه أخير . ولكن الأسباب التي يعتمد عليها كانتور في قوله إن الأصليات محكمة الترتيب يبدو أنها غير كافية . ولذا يجب أن تظل هذه المسألة معروضة للبحث .

٢٨٨ — أهم الأعداد المتصاعدة خلاف ا. هو عدد المتواصل continuum ، وقد أثبت أن هذا العدد ليس ا. [١] ويأمل أن يبرهن أنه ا. [٢] — وهو أمل ولو أنه ظل يراوده زمناً إلا أنه لم يتحقق . وقد بين أن عدد المتواصل هو ٢ ا. [٣] وهي نظرية في غاية الغرابة . ولكن يجب أن يظل من المشكوك فيه هل هذا العدد هو ا. ، على الرغم من وجود أسباب ترجيح ذلك [٤] . أما عن تعريف ا. ، وجميع تتالى الأصليات المتصاعدة ، فهذه مسألة يحسن إرجاؤها إلى أن ننظر في أمر الترتيبات المتصاعدة . ويجب ألا نفترض أننا نستطيع الحصول على عدد أصلي متصاعد جديد بمجرد إضافة عدد واحد إليه ، أو حتى إضافة أي عدد متناه أو ا. ، بالعكس

---

(١) Acta Math. II. p. 308.

(٢) المرجع السابق ص ٤٠٤ حيث ا. هو العدد الثاني .

(٣) Math. Annalen XLVI. § 4. Note.

(٤) والسبب الذي دعا إليه كانتور في جعله القوة الثانية متطابقة مع المتواصل هو أن كل مجموعة نقطية من النقط المتجانسة لها إما القوة الأولى وإما قوة المتواصل ، ومن هنا يظهر أن قوة المتواصل لابد أن تكون القوة الثانية .

(Math. Annalen. 23. p. 488. See also Acta Math. VII). ولكن يظهر أن هذا الاستنتاج متزعزع بعض الشيء . واعتبر مثلاً الشكل الآتي : في متوالية متصلة يتكون الاتصال بعدد معين من عدد من النقط الاتصالية وإما من عدد واحد فقط حتى يشمل الميدان . ولا يتكون أبداً عدد متناه من النقط أكثر من واحد . ويمكن الاتصالات المتناهية تقسيمها إلى أنواع أخرى من المتسلسلات ، مثل ذلك المتوسطات .

أما النظرية القائلة بأن عدد المتواصل هو ٢ ا. فتنتج ببساطة من القضية المذكورة في الباب ٢٤ وهي أن الفصول اللامتناهية للأعداد الصحيحة المتناهية تكون متسلسلة متصلة . وعدد جميع فصول الأعداد الصحيحة المتناهية هو ٢ ا. (انظر ما سبق) وعدد الفصول المتناهية هو ا. ، إذن عدد جميع الفصول اللامتناهية للأعداد الصحيحة المتناهية هو ٢ ا. لأنه طرح ا. لا ينقص أي عدد أكبر من ا. ، ولذلك ٢ ا. هو عدد المتواصل . ولكي نبرهن على أن هذا العدد هو ا. يكفي أن نبين أن عدد الفصول اللامتناهية للأعداد الصحيحة المتناهية هو عين عدد أصناف المتسلسلات التي يمكن أن تتكون من جميع الأعداد الصحيحة المتناهية . وسنرى في الباب التالي أن هذا العدد الأخير هو ا. .

مثل هذه الأمثلة الصغيرة لن تزعج الأصليات المتصاعدة : إذ من المعروف أنه في حالة ا ، وبعض فصول الأصليات المتصاعدة ، أن العدد يكون مساوياً لضعفه ، وكذلك في حالة ا وربما في فصل مختلف عن الأصليات المتصاعدة أن العدد يكون مساوياً لمربعه . فمجموع عددين تابعين للفصل الأول من هذين الفصلين يساوي أكبر العددين . وليس من المعروف هل جميع الأصليات المتصاعدة تتبع أو لا تتبع أحد هذين الفصلين أو كليهما .

٢٨٩ — وقد نتساءل : على أي وجه تكون كلا الأصليات المتناهية والمتصاعدة متسلسلة مفردة ؟ أليست متسلسلة الأعداد المتناهية تامة بذاتها بدون إمكان مد علاقتها المولدة؟ فإذا عرفنا متسلسلة الأعداد الصحيحة بواسطة العلاقة المولدة للاختلاف بواحد — وهي الطريقة الطبيعية أكثر إذا شئنا اعتبار المتسلسلة كتوالية — إذن لا بد من الاعتراف بأن الأعداد الصحيحة المتناهية تكوّن متسلسلة تامة ، وليس هناك إمكان لإضافة حدود لها . أما إذا اعتبرنا المتسلسلة — كما هو المناسب في نظرية الأصليات — بأنها ناشئة من ترابط الكل بالجزء في الفصول التي يمكن للأعداد الصحيحة الدخول فيها ، فسنرى عندئذ أن هذه العلاقة تمتد بالفعل إلى ما وراء الأعداد المتناهية . فهناك عدد لامتناه من الفصول اللامتناهية التي تتضمن أي فصل متناه معلوم ، الذي يسبق عدده بالترابط مع تلك الفصول عدد أي فصل من الفصول اللامتناهية . ولا أستطيع أن أحكم هل يوجد أي معنى آخر بمقتضاه تكوّن الأعدادُ الصحيحة متناهية ومتصاعدة متسلسلة مفردة . ويكفي المعنى المذكور سابقاً لبيان عدم وجود أي خطأ منطقي في اعتبارها متسلسلة مفردة ، إذا عرفنا أن أحد عددين أصليين لا بد أن يكون هو الأكبر منهما . وقد حان الآن الوقت للنظر في أمر الترتيبيات المتصاعدة .

الباب الثامن والثلاثون

الترتيبات المتصاعدة

٢٩٠ – الترتيبات المتصاعدة إن أمكن بحثها أكثر فائدة وأهمية من الأصليات المتصاعدة ، لأنها على العكس من هذه لا تخضع لقانون التبادل ؛ ولذلك كان حسابها مختلفاً تماماً عن الحساب الابتدائي . ولكل عدد أصلي متصاعد ، أو على أقل تقدير لأي عدد في فصل معين ، يوجد مجموعة لامتناهية من الترتيبات المتصاعدة ، ولو أن العدد الأصلي لجميع الترتيبات هو عين عدد جميع الأصليات أو أقل منه . والترتيبات المنتمية لمتسلسلة عددها الأصلي هو $\aleph_0$ تسمى الفصل الثاني للترتيبات . والتي تناظر $\aleph_1$ تسمى الفصل الثالث ، وهكذا . والأعداد الترتيبية هي أساساً فصول متسلسلات ، أو الأجدر أنها فصول علاقات مولدة للمتسلسلات . وهي تعرف في الأغلب بعلاقة ما مع الاستنباط الرياضي . وكذلك الترتيبات المتناهية يمكن أن تفهم على أنها أصناف من المتسلسلات ؛ مثال ذلك العدد الترتيبي n يمكن أن يؤخذ على أنه يعني « علاقة متسلسلة لنون من الحدود » ، أو بلغة دارجة n من الحدود في صف row . وهذه فكرة ترتيبية متميزة عن « النونية » ، ومتقدمة منطقياً عليها[1] . وبهذا المعنى n اسم لفصل من العلاقات المتسلسلة . وهذا هو المعنى ، لا ذلك المعبر عنه « بالنوني » ، الذي عممه كانتور لينطبق على المتسلسلات اللامتناهية .

٢٩١ – ولنبدأ بتعريف كانتور للفصل الثاني من الأعداد الترتيبية[2] الذي يقول فيه : « نستطيع الآن أن نبين كيف انتهينا إلى تعاريف الأعداد الجديدة ، وبأي الطرق نحصل على المقاطع الطبيعية ، التي أسميها « فصول الأعداد » ، في المتسلسلات اللانهائية على الإطلاق للأعداد الصحيحة الحقيقية . . . . . . فالمتسلسلة (١) الخاصة بالأعداد الحقيقية الصحيحة الموجبة ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . . . . ν . . .

---

(١) انظر ما سبق الجزء الرابع الباب الرابع والعشرين . ٢٤٦ ، ٢٣٢ .

(٢) Mannichfaltigkeitslehre, pp. 32, 33

. . . . . . تنشأ من تكرار وضع وتركيب وحدات مفروضة من قبل ، ومعتبرة على أنها متساوية . والعدد ν (الحرف اليونانية) يعبر بالسوية على جملة متناهية معينة مثل هذه الأوضاع المتتالية . وعلى تركيب الوحدات (Anzahl concepts الموضوعة فى كل . وهكذا فإن تكوين الأعداد الحقيقية الصحيحة المتناهية يعتمد على جمع وحدة مع عدد كان قد تكون من قبل ؛ وسأسمى هذه المرحلة التى سنرى فوراً أنها تلعب كذلك دوراً أساسياً فى تكوين الأعداد الصحيحة الأعلى ، « المبدأ للتكوين » . وجملة (Anzahl) الأعداد الممكنة ν فى الفصل (١) فهى لامتناهية ، ولا يوجد عدد هو الأكبر بينها . إذن على الرغم من أنه من التناقض القول بوجود أكبر عدد فى الفصل (١) ؛ إلا أنه لا اعتراض على تصور عدد جديد ، سنسميه ω يدل على أن كل المجموعة (١) معطاة بواسطة قانونها بترتيب تتاليها الطبيعى . (بنفس الطريقة التى تدل بها ν على تركيب جملة متناهية معينة من الوحدات فى كل) . بل من الجائز أن ننظر إلى العدد الجديد المخترع ω على أنه نهاية تتجه إليها أعداد ν ، إذا كنا لن نفهم من هذا شيئاً آخر سوى أن ω هو أول عدد صحيح يتبع جميع الأعداد ν ، أى أنه يسمى أكبر من كل عدد من أعداد ν . وبالسماح بإضافات أخرى من الوحدات تتبع وضع العدد ω فإننا نحصل بمعونة المبدأ « الأول » للتكوين على الأعداد الآتية :

$\omega + 1$ ، $\omega + 2$ . . . . $\omega + \nu$ . . . .

وحيث أننا لا نبلغ هنا أى عدد هو الأكبر ؛ فإننا نتصور عدداً جديداً يمكن أن نسميه 2ω ، ويكون هو الأول بعد جميع الأعداد السابقة ν ، $\omega + \nu$.

« والدالة المنطقية التى أعطت لنا العددين ω ، 2ω من الواضح أنها تختلف عن المبدأ الأول للتكوين ، وأنا أسميها « المبدأ الثانى لتكوين » الأعداد الصحيحة الحقيقية ، وأعرفها بعبارة أضبط بما يلى : إذا وجد أى تتال محدود من الأعداد الصحيحة الحقيقة المعرّفة ليس بينها أى عدد هو الأكبر ؛ أمكن إيجاد عدد جديد بواسطة هذا المبدأ الثانى للتكوين ؛ ويعتبر هذا العدد « نهاية » تلك الأعداد ؛ أى يعرّف بأنه العدد الأكبر الذى يأتى بعدها جميعاً » .

ويمكن أن نجعل مبدأي التكوين أوضح إذا اعتبرنا أن العدد الترتيبي إنما هو مجرد صنف أو فصل من متسلسلات ، أو بالأحرى من علاقاتها المولدة . فإذا وجدت متسلسلة ليس لها حد أخير ، فكل جزء من مثل هذه المتسلسلة والذي يمكن تعريفه بأنه جميع الحدود الداخلة في المتسلسلة بما فيها حد ما من المتسلسلة ، سيكون له حد أخير . ولكن لما كانت المتسلسلة ذاتها ليس لها حد أخير ، فهي من صنف مختلف عن أي جزء من مثل هذه الأجزاء ، أي عن أي قطعة من ذاتها . وإذن لا بد أن يكون العدد الترتيبي الذي يمثل المتسلسلة ككل مختلفاً عن العدد الترتيبي الذي يمثل أي قطعة من ذاتها ، ولا بد أن يكون عدداً له سابق مباشر ما دامت المتسلسلة ليس لها حد أخير . وهكذا الرمز ω إن هو إلا مجرد اسم لفصل « المتوالية » ، أو للعلاقات المولدة لمتسلسلات هذا الفصل . والمبدأ الثاني للتكوين هو باختصار ذلك الذي به نعرف صنفاً معيناً من المتسلسلات ليس لها حد أخير . فإذا اعتبرنا الترتيبيات السابقة على أي عدد ترتيبي α ، نحصل عليه من المبدأ الثاني باعتبار أنه يمثل قطعاً من متسلسلة تمثلها α ، فالعدد الترتيبي نفسه α يمثل نهاية مثل هذه القطع . والقطع كما رأينا من قبل لها دائماً نهاية (بشرط ألا يكون لها نهاية عليا) حتى حين لا يكون للمتسلسلة الأصلية أية نهاية[1] .

ولكي يعرف كانتور فصلاً من الترتيبيات المتصاعدة (ويكون تاليه لامتناهياً كما هو واضح) يدخل ما يسميه بمبدأ التناهي (Hemmungsprincip . principle of limitation) وطبقاً لهذا المبدأ يتألف ω الفصل الثاني ، فقط من الأعداد التي سوابقها من ١ إلى فوق تكون متسلسلة من القوة الأولى ، أي متسلسلة عددها الأصلي هو α ، أو متسلسلة لحدودها بترتيب مناسب علاقة واحد بواحد مع الأعداد الصحيحة المتناهية . وعندئذ يتبين أن قوة الفصل الثاني أو العدد الأصلي للترتيبيات ككل

---

(١) انظر فيما يختص بقطع المتسلسلات المكونة للترتيب عدداً ترتيبياً عند Cantor, in Math. Annalen, XLIX, § 13. ومن المهم ملاحظة أن الترتيبات التي شرحت هنا تظهر في نظرية كانتور للأعداد الحقيقية معتبرة كالقطع (انظر ما سبق الباب الثالث والثلاثين) ، ولا يوجد هناك أبداً وجود ليس عرضة للمناقشة حين نستعمل طريقة القطع ، على حين أنه في أي نظرية أخرى نجد أن النظرية الوجودية لا تقبل البرهنة وغير مقنعة .

(٢) Mannichfaltigkeitslehre, p. 34.

مختلفة عن ا. (ص ٢٥) وهو العدد الأصلي الذي يأتي مباشرة بعد ا. (ص ٣٧). ومعنى العدد الأصلي بعد ا. يتضح بوضوح من القضية الآتية (ص٣٨) وإذا كانت م أي مجموعة جيدة التعريف لقوة الفصل الثاني من الأعداد، وإذا أخذت قطعة portion لامتناهية مَ من م، إذن إما أن المجموعة مَ تعتبر كمجرد متسلسلة لامتناهية: وإما أن يقام تناظر فريد ومنعكس بين م، مَ. وبعبارة أخرى أي جزء من مجموعة من القوة الثانية فهو إما متناه، أو من القوة الأولى، أو من القوة الثانية: وإذن فلا قوة بين الأولى والثانية.

٢٩٢ — قبل أن نشرع في بحث جمع الترتيبيات وضربها. الخ، يحسن أن نجرد القضايا السابقة بقدر الإمكان من ثوبها الرياضي، وأن نصوغ بالضبط معناها في لغة عادية. أما فيما يختص بالرمز الترتيبي ω، فهذا ببساطة اسم لفصل العلاقات المولدة للمتواليات. وقد رأينا كيف تعرف المتوالية: فهي متسلسلة لها حد أول، وحد يقع مباشرة بعد كل حد، وتخضع للاستنباط الرياضي. لأننا يمكن أن نبين بالاستنباط الرياضي نفسه أن كل جزء من المتوالية إن كان لها حد أخير فلها عدد ترتيبي متناه ما ن حيث ن تدل على فصل المتسلسلة المكونة من ن من الحدود بترتيب معين. على حين أن كل جزء ليس له حد أخير فهو نفسه متوالية. وكذلك نستطيع أن نبين (مما هو واضح حقاً) أنه لا ترتيبي متناه يمثل متوالية. ولكن المتواليات فصل معرف تماماً من المتسلسلات؛ ويبين مبدأ التجريد وجود شيء ما لها جميعاً معه علاقة لا تقوم مع أي شيء آخر — لأن جميع المتواليات متشابهة ترتيبياً (أي لها علاقة واحد بواحد بحيث تترابط الحدود المتقدمة مع الحدود المتقدمة والحدود المتأخرة مع الحدود المتأخرة). والتشابه الترتيبي متماثل متعد وهو بين المتسلسلات منعكس. هذا الشيء الذي يبينه مبدأ التجريد قد يؤخذ على أنه صنف أو فصل العلاقات المتسلسلة ما دامت أي متسلسلة لا يمكن أن تنتمي إلى أكثر من صنف واحد من المتسلسلات. فالصنف الذي تنتمي إليه المتواليات هو الذي يسميه كانتور ω. ولا يمكن للاستنباط الرياضي إذا بدأ من أي ترتيبي متناه أن يبلغ ω، ما دامت ω ليست عضواً في فصل الترتيبيات المتناهية. حقاً قد نعرف الترتيبيات أو الأصليات المتناهية — وإذا كنا بصدد المتسلسلات

فيبدو أن هذا أفضل تعريف — بأنها تلك التي إذا بدأت من ٠ أو ١ فيمكن أن نبلغها بالاستنباط الرياضي . هذا المبدأ لا ينبغي من أجل ذلك أن يؤخذ على أنه بديهية أو مسلمة بل على أنه تعريف التناهي finitude ويجب ملاحظة أنه بمقتضى هذا المبدأ القائل بأن كل عدد فله تال مباشر ، يمكننا إثبات أن أي عدد معلوم ، وليكن ١٠.٩٣٧ فهو عدد متناه — بشرط أن يكون العدد المعلوم هو طبعاً عدد متناه . بعبارة أخرى كل قضية لها صلة بالعدد ١٠.٩٣٧ فيمكن إثباتها دون استخدام الاستنباط الرياضي الذي كما يذكر معظمنا لم يكن له ذكر في الحساب الذي استخدمناه في طفولتنا . ليس ثمة إذن أي خطأ منطقي في استخدام المبدأ كتعريف لفصل الأعداد المتناهية . كما لا يوجد أي سبب لافتراض أن المبدأ ينطبق على « جميع » الأعداد الترتيبية أو على « جميع » الأعداد الأصلية .

وإذ قد بلغنا هذه النقطة من الحديث فلعل كلمة نوجهها للفلاسفة تكون مناسبة للمقام . فعظمهم فيما يبدو يفترضون أن التمييز بين المتناهي واللامتناهي من المعاني الواضحة مباشرة ، ويفكرون في الموضوع كما لو أنهم كانوا في غير حاجة إلى تعاريف دقيقة . ولكن الواقع يدل على أن التمييز بين المتناهي واللامتناهي ليس بأي شكل يسيراً ، ولم يكشف عنه الستار إلا بواسطة الرياضيين المحدثين . فالعددان ٠ ، ١ يخضعان للتعريف المنطقي ، ويمكن أن يبين منطقياً أن كل عدد فله تال ، عندئذ نستطيع أن نعرف الأعداد المتناهية إما بهذه الحقيقة من أن الاستنباط الرياضي يمكن أن يبلغها بادئة من ٠ أو ١ — أو بلغة ديديكند أنها تكوّن سلسلة الصفر أو الواحد . أو بهذه الحقيقة من أنها أعداد مجموعات ليس لأي جزء صحيح منها نفس العدد كالكل . ومن السهل أن نبين أن هذين الشرطين متكافئان ، ولكنهما وحدهما هما اللذان يميزان بالدقة المتناهي واللامتناهي ، وأي مناقشة للانهاية تغفلهما فلا بد أن تكون متهافتة .

٢٩٣ — أما بالنسبة لأعداد الفصل التالي غير ω . فيمكن أن نبدي الملاحظة الآتية . المجموعة المكونة من حدين أو أكثر فهي دائماً قابلة لأكثر من علاقة متسلسلة واحدة ، إلا فيما يحتمل بالنسبة لبعض المجموعات اللانهائية الكبيرة جداً . فالناس يمكن أن يرتبوا بحسب منازلهم أو أعمارهم أو ثرواتهم أو حروفهم الأبجدية :

وجميع هذه العلاقات بين الناس تولد متسلسلات كل منها يضع المجموعة في ترتيب مختلف . ولكن حين تكون المجموعة متناهية ، فإن جميع التراتيب الممكنة تعطي عدداً ترتيبياً واحداً بعينه ، هو ذلك الذي يناظر العدد الأصلي للمجموعة . بعبارة أخرى جميع المتسلسلات التي يمكن أن تتكوّن من عدد معين متناه من الحدود فهي متشابهة ترتيبيا . أما بالنسبة للمتسلسلات اللامتناهية فالأمر مختلف تماماً . فالمجموعة اللامتناهية من الحدود التي لها القدرة على تراتيب مختلفة قد تنتمي بتراتيبها المختلفة لأصناف مختلفة تماماً . وقد رأينا من قبل أن المنطقات تكوّن في ترتيب معين متسلسلة متلاحمة لا أول لها ولا آخر ، وتكوّن في ترتيب آخر متوالية . فهذه متسلسلات من أصناف مختلفة بالكلية ، ويشمل هذا الإمكان جميع المتسلسلات اللامتناهية . والصنف الترتيبي لمتسلسلة لا يتغير بتبادل حدين متعاقبين . ولا يتغير تبعاً لذلك بفضل الاستنباط الرياضي بأي عدد متناه من مثل هذه التبادلات . والمبدأ العام هو أن صنف المتسلسلة لا يتغير بما قد نسميه «بالتبديل» permutation . أي أنه إذا كانت ى علاقة متسلسلة بها ترتب حدود ى ، وكانت ع علاقة واحد بواحد في ميدانها وعكس ميدانها معاً ؛ إذن ع ى ع علاقة متسلسلة من نفس الصنف مثل ى . وجميع العلاقات المتسلسلة التي مجالها ى ، والتي هي من نفس الصنف مثل ى ، فهي من الصورة المذكورة ع ى ع . ولكن الصنف مع إعادة ترتيبه إعادة لا تقبل الرد إلى التباديل فإنه بوجه عام يتغير . خذ مثلا الأعداد الطبيعية أولا بترتيبها الطبيعي ، ثم بالترتيب الذي تقع فيه ٢ أولا ، ثم جميع الأعداد الأعلى بترتيبها الطبيعي ، وآخر كل شيء ١ . في الترتيب الأول تكون الأعداد الطبيعية متوالية ، وفي الثاني تكوّن متوالية مع حد أخير . أما في الصورة الثانية فلم يعد الاستنباط الرياضي ينطبق ، إذ هناك قضايا تصح على العدد ٢ وعلى كل عدد متناه تابع له ، ولكنها لا تصح على العدد ١ . والصورة الأولى هي صنف أي متسلسلة أساسية من النوع الذي بحثناه في الباب الرابع والثلاثين . والصورة الثانية هي صنف أي متسلسلة من مثل هذه المتسلسلات مأخوذة مع نهايتها . وقد بين كانتور أن كل مجموعة معدودة فيمكن أن تعطى ترتيباً يناظر أي عدد ترتيبي معين من الفصل الثاني[1] .

---

(١) Acta Math. 11, p. 194.

بناء على ذلك يمكن تعريف الفصل الثاني من الأعداد الترتيبية بأنه جميع أصناف المتسلسلات المحكمة الترتيب التي يمكن أن يرتب فيها أي مجموعة واحدة معدودة معلومة بواسطة علاقات مولدة مختلفة . ويعتمد إمكان مثل هذه الأصناف المختلفة على الخاصة الأساسية للمجموعات اللامتناهية من أن الجزء اللامتناهي لمجموعة لامتناهية يمكن دائماً أن يوجد ويكون له ترابط واحد بواحد مع الكل . فإذا كانت المجموعة الأصلية متسلسلة أصبح الجزء بهذا الترابط متسلسلة شبيهة ترتيبيا بالكل . أما الحدود الباقية فإذا أضيفت بعد جميع حدود الجزء اللامتناهي فإنها تجعل الكل عندئذ مختلفاً ترتيبيا عما كان عليه[1] .

ويمكن أن نماثل بين نظرية الترتيبيات وبين نظرية الأصليات بما يأتي : يقال إن علاقتين شبيهتان like إذا كان هناك علاقة واحد بواحد ل ميدانها مجال واحدة منهما (ق) وتكون بحيث أن العلاقة الأخرى هي ل ق ل . فإذا كانت ق علاقة محكمة الترتيب ، أي علاقة تولد متسلسلة محكمة الترتيب ، أمكن أن يعرف فصل العلاقات الشبيهة بـ ق بأنه العدد الترتيبي لـ ق . إذن الأعداد الترتيبية تنتج من الشبه likeness بين العلاقات كما تنتج الأصليات من التشابه Similarity بين الفصول .

٢٩٤ ــ نستطيع الآن أن نفهم قواعد جمع الترتيبيات المتصاعدة وضربها . وكلا عمليتي الجمع والضرب يخضعان لقانون الترتيب ، ولكنهما لا يخضعان لقانون التبادل . وقانون التوزيع صحيح بوجه عام ولكن في صورة .

$$ح (أ + ب) = ح أ + ح ب$$

حيث أ + ب ، أ ، ب هي المضروب فيها[2] . أما أن الجمع لا يخضع لقانون التبادل فمن السهل تبين ذلك . خذ مثلا ω ÷ ١ ، ١ + ω ، فالأولى تدل على

---

(١) الحدود الباقية إذا كانت عددها متناهيا أو [illegible] في غير المتسلسلة إذا أضيفت [illegible]
أما إذا كانت لا متناهية [illegible] وسنشرح هذا شرحاً أوفى فيما يلي .

(٢) [illegible] p. 53 ــ [illegible] + [illegible] تتكون من المتسلسلة التي تتكون من جزأين [illegible] من الصنف [illegible] جزء من الصنف [illegible] ، وتتكون [illegible] المتسلسلة التي تتكون من الصنف أ من متسلسلة الصنف ب ، ويتكافأ من المتسلسلة المكونة من متوالية [illegible] مثلاً ٢

متوالية متبوعة بحد مفرد ، وهذا هو الصنف الذي تعرضه متوالية مع نهايتها ، وهذه تختلف عن المتوالية البسيطة . وعلى ذلك ن + ١ ترتيبا مختلفة عن ن . أما ١ + ن فإنها تدل على متوالية مسبوقة بحد مفرد ، وهذه أيضاً متوالية . وعلى ذلك ١ + ن = ن ، ولكن ن + ١ لا تساوي ن + ١ [١] . الواقع أن أعداد الفصل الثاني من نوعين (١) أعداد لها سابق مباشر ، (٢) أعداد ليس لها أي سابق . فالأعداد من مثل ن ، ن × ٢ ، ن × ٣ ، . . . . . ن^٢ ، . . . . . نن . . . . . فليس لها أي سابق مباشر . وإذا أضيف أي عدد من هذه الأعداد إلى عدد متناه ، لظهر نفس العدد المتصاعد ولكن إذا جمع أي عدد متناه مع أي عدد من هذه الأعداد لحصلنا على عدد جديد . والأعداد التي هي بغير سابق تمثل متسلسلات ليس لها طرف ، أما التي لها سابق فإنها تمثل متسلسلات لها طرف . ومن الواضح أن الحدود التي تجمع في أول متسلسلة لا طرف لها ، فإنها تترك المتسلسلة بلا طرف ، ولكن جمع متسلسلة منتهية terminating على متسلسلة لا أول لها ولا آخر ، فإنها تنتج متسلسلة منتهية ، وإذن صنف جديد من الترتيب . وبذلك ليس ثمة أي غموض حول هذه القواعد من الجمع التي إنما تدل على صنف المتسلسلة الناجمة من تركيب متسلسلتين معلومتين .

ومن ثم من السهل الحصول على قواعد الطرح [٢] . فإذا كانت ا أصغر من ب كانت المعادلة ا + س = ب لها دائماً حل واحد لا غيرفى س تمثله : ب − ا . وهذا يعطينا صنف المتسلسلة التي لا بد من جمعها بعد الحصول على ب .

ولكن المعادلة س + ا = ب لن يكون لها أحياناً حل ، وفي بعض الأحيان الأخرى عدد لا متناه من الحلول . فالمعادلة س + ن = ن + ١ ليس لها حل ألبتة : إذ لا عدد من الحدود يجمع في أول متوالية سينتج متوالية مع حد أخير .

الواقع في المعادلة س + ا = ب إذا كانت ا تمثل صنفاً لا طرف له ، بينما ب تمثل صنفاً منتهياً بطرف . فمن الواضح بما فيه الكفاية أن الحدود التي تجمع

---

(١) Math. Annalen. XLVI. § 8.

(٢) Mannichfaltigkeitslehre p. 39

قبل ا لن تنتج أبداً صنفاً متشابهاً بطرف ، ولا يمكن إذن البتة أن تنتج الصنف ب .
ومن جهة أخرى إذا اعتبرنا المعادلة .

$$\text{س} + \omega = \omega - ٢$$

وجدنا أنها تتحقق بالمعادلة س = ω + ن حيث ن هو الصفر أو أى عدد متناه . لأن ن قبل ω الثانية ستلتحم معها لتكون ω . وبذلك تكون ω + ن + ω = ω × ٢ ، وفي هذه الحالة عندئذ س يكون له عدد لامتناه من القيم . ومع ذلك ففي جميع مثل هذه الأحوال قيم س الممكنة لها حد أصغر هو ضرب من القيمة الرئيسية للفرق بين ب ، ا . وبذلك يكون الطرح على نوعين بحسب ما نبحث عن عدد إذا جمع على ا أعطى ب ، أو عن عدد يجمع ا عليه بحيث يعطي ب . وفي الحالة الأولى يوجد دائماً حل وحيد ، بشرط أن تكون ا أصغر من ب . وفي الحالة الثانية ربما لا يكون هناك حل ، وربما كان هناك عدد لا نهاية له من الحلول .

٢٩٥ – يعرّف ضرب الترتيبات كالآتى [١] : ليكن م ، ن متسلسلة من الصنفين ا ، ب . وبدلا من كل عنصر ى في ن ، ضع متسلسلة مى من الصنف ا وليكن ل المتسلسلة المكونة من جميع حدود جميع متسلسلات مى مأخوذة بالترتيب الآتى : (١) أى عنصرين في ل منتميان لنفس المتسلسلة مى فتحتفظ بالترتيب الذى كان لها في مى . العنصران المنتميان لمتسلسلتين مختلفتين مى ، مى' فلهما الترتيب الذى كان ى ، ى' في ن . إذن الصنف ل إنما يعتمد فقط على ا ، ب ، ويعرف بأنه حاصل ضربهما ا ب ، حيث ا هو المضروب ، ب هو المضروب فيه . ومن السهل أن نتبين أن حواصل الضرب لا تخضع دائماً لقانون التبادل . مثال ذلك ٢ × ω هي صنف المتسلسلة التي تقدمها

ه١ ، و١ ، ه٢ ، و٢ ، ه٣ ، و٣ ، .... هى ، وى ، ....

وهذه متوالية ، بحيث أن ٢ × ω = ω . ولكن ω × ٢ هى الصنف الذى تقدمه

ه١ ، ه٢ ، ه٣ ، .... هى ، .... و١ ، و٢ ، و٣ ، .... وى

---

[١] Math. Annalen, XLVI, § 8.

وهذا تركيب من متواليتين لا من متوالية واحدة . ففي المسلسلة الأولى لا يوجد إلا حد واحد فقط ليس له سابق مباشر هو ه$_1$. وفي المسلسلة الثانية يوجد حدان هما ه$_1$ ، و$_1$.

وينبغي تمييز نوعين في القسمة كما فعلنا في الطرح[1]. فإذا وجد ثلاثة ترتيبات م ، ب ، حـ بحيث إن ب = م × حـ وفي المعادلة ب = س × م ليس لها حل آخر سوى س = حـ . ويمكن عندئذ أن ندل على حـ بقولنا $\frac{ب}{م}$[2]. ولكن المعادلة ب = س م إذا قبلت الحل أصلاً فربما كان لها عدة جذور إن لم يكن لها عدد لا نهاية له من الجذور ، أحدها مع ذلك يكون دائماً الأصغر . وهذا الجذر الأصغر ندل عليه بقولنا $\frac{ب}{م}$.

وضرب الترتيبات هي العملية التي بها تمثل متسلسلة متسلسلات على أنها متسلسلة مفردة ، من حيث إننا نأخذ كل متسلسلة ككل مع الاحتفاظ بموضعها في متسلسلة المتسلسلات . ومن جهة أخرى القسمة هي العملية التي بها نجزئ متسلسلة مفردة إلى متسلسلة متسلسلات دون أن نغير ترتيب حدودها . ولهاتين العمليتين بعض الأهمية فيما يختص بالأبعاد . والقسمة كما هو واضح إنما تكون ممكنة بالنسبة لبعض أصناف المتسلسلات . أما تلك التي لا تكون فيها ممكنة فقد تسمى أولية prime . ونظرية الأعداد الأولية شائقة ولكن ليس من الضروري أن نخوض في بحثها[3].

٢٩٦ — كل عدد صحيح متناه أو دالة أسية لـ ω فهو عدد من الفصل الثاني حتى حين تقع أمثال هذه الأعداد ω^{ω} ، $\omega^{\omega^{\omega}}$ ... إلخ[4]. ولكن لا ينبغي افتراض أن جميع أصناف المتسلسلات المعدودة تقبل مثل هذه الصورة . مثال ذلك الصنف η الذي يمثل المنطقات بترتيب المقدار[5] فإنه عاجز بالكلية عن التعبير بحدود ω

(١) Mannichfaltigkeitslehre, p. 40.

(٢) عدل كانتور اصطلاحه القديم بوضع المضروب ، فكان أولاً يدل على ا × ب بأن ا المضروب فيه و ب المضروب ، ولكنه الآن أخذ بترتيب العكس . فقد يحدث اضطراب في الأخذ به الآن عند النقل من مؤلفاته القديمة . في هذا التعريف الحالي .

(٣) انظر Mannichfaltigkeitslehre, p. 40.

(٤) انظر فيما يختص بنظرية الأسية Math. Annalen, XLVI, § 9.

(٥) Math. Annalen, XLIX, §§ 18-20.

وكانتور لا يسمي مثل هذا الصنف « عدداً » ترتيبياً ، إذ يحتفظ باصطلاح « العدد الترتيبي » للمتسلسلة « المحكمة الترتيب » ، أي التي بحيث يكون لها الخاصتان الآتيتان[1] :

١ — يوجد في المتسلسلة ف حد أول .

٢ — إذا كانت فَ جزءاً من ف ، وكانت ف حاصلة على حد واحد أو أكثر تأتي بعد جميع حدود فَ ، إذن هناك حد بَ من ف يتبع مباشرة فَ ، بحيث لا يكون هناك أي حد من ف قبل بَ وبعد جميع حدود فَ .

وجميع الدوال الممكنة لـ ω والترتيبيات المتناهية إنما تمثل فقط متسلسلات محكمة الترتيب ، باستثناء أصناف أخرى مثل أصناف المنطقات ، ولو أن العكس لا يصح . ففي كل متسلسلة محكمة الترتيب يوجد حد يأتي بعد أي حد معلوم ، باستثناء الحد الأخير إن وجد . وإذا كانت المتسلسلة لامتناهية فإنها تشتمل دائماً على أجزاء هي متواليات . والحد الذي يأتي ما بعد متوالية فليس له سابق مباشر ، وصنف القطعة المكونة من سوابقها هي مما يسمى النوع الثاني . والحدود الأخرى فلها سوابق مباشرة ، وأصناف قطعها المكونة من سوابقها يقال إنها من النوع الأول .

٢٩٧ — النظر في المتسلسلات غير المحكمة الترتيب هام ، ولو أن نتائجه أقل صلة بالحساب من حالة المتسلسلة المحكمة الترتيب . وعلى ذلك فالصنف ω^* لا يعبر عنه كدالة ω ما دامت جميع دوال ω تمثل متسلسلات لها حد أول ، بينما ω^* ليس له حد أول ؛ وجميع دوال ω تمثل متسلسلات كل حد فيها له تالٍ مباشر ؛ وليست هذه هي الحال في ω^* . بل إن متسلسلة الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة والصفر فلا يمكن التعبير عنها بحدود ω ، ما دامت هذه المتسلسلة ليس لها بداية . ويعرف كانتور لهذا الغرض الصنف المتسلسل ω^* — الذي قد يوصف على أنه « متراجعة » (المرجع السابق بند ٧) وتعريف المتوالية كما رأينا ذو صلة بعلاقة ما واحد بواحد غريبة

---

(١) Math. Annalen, XLIX, § 12 . ويمكن التعبير عن هذا التعريف بتعريف آخر يبدو مكافئاً له : تكون المتسلسلة محكمة الترتيب إذا كان كل فصل محتوى فيها له حد أول (باستثناء الفصل الصفري طبعاً) .

هي ب[1] . فحين « ولد » ق متوالية تكون هذه المتوالية بالنسبة لـ ق aliorelative مراجعة بالنسبة لـ ق « ، وصفها باعتبار أنه متولد بواسطة ق ويرمز له بالرمز ى* . وهكذا فإن كل متسلسلة الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة فهى من الصنف ى* + ى . ومثل هذه المتسلسلة يمكن قسمتها حيثما كانت إلى متواليتين متولدتين بعلاقات عكسية . ولكن بالنسبة لعلاقة واحدة فلا يمكن أن ترد المتسلسلة لأى تركيب من متواليات . مثل هذه المتسلسلة تعرف تعريفاً تاماً بالطرق المذكورة فى الجزء الرابع كما يأتى : ف علاقة واحد بواحد غريبة ، ومجال ف متطابق مع مجال ق ؛ وعلاقة الانفصال وهى « قوة ما موجبة متناهية لـ ق » فهى متعدية ولا متماثلة ، وتتكون المتسلسلة من جميع الحدود التى لها هذه العلاقة أو عكسها مع حد معلوم مأخوذة مع هذا الحد المعلوم . وبذلك فإن فصل المتسلسلات المتناظر لأى صنف ترتيبى متصاعد يمكن دائماً أن يعرف بالطرق المذكورة فى الجزء الرابع . ولكن حيث لا يمكن التعبير عن الصنف كدالة ى أو ى* أو هما معاً ، فسيكون من الضرورى عادة ، إن وجب أن نعرف صنفنا تعريفاً تاماً ، إما أن ندخل صلة بعلاقة أخرى مما تكون حدود متسلسلتنا بالنسبة لها متوالية ؛ وإما أن نخصص مسلك متسلسلتنا بالنسبة للنهايات . وهكذا فإن صنف متسلسلة المنطقات لا يعرف بتخصيصه بأنه ملتحم ، وليس له أول أو آخر . وهذا التعريف ينطبق كذلك مثلاً على ما يسميه كانتور ، شبه المتواصل ؛ أى المتواصل المنقطع عند طرفيه . ويجب أن نضيف إلى ذلك أن المنطقات معدودة ، أى أنها بالنسبة لعلاقة أخرى تكون متوالية . وإنى أشك فى هذه الحالة إذا كان مسلك المنطقات بالنسبة للنهايات مما يمكن استخدامه فى التعريف . وأهم خصائصها فى هذا الصدد هى (١) أنها متكثفة فى ذاتها ؛ أى كل حد منها فهو نهاية متواليات ومراجعات معينة ، (٢) فى أى فترة ففيها متوالية أو مراجعة ليس لها نهاية . ولكن كلا هاتين الخاصتين تنتميان إلى متسلسلة الأعداد اللامنطقة ؛ أى إلى المتسلسلة التى نحصل عليها بحذف جميع المنطقات من متسلسلة الأعداد الحقيقية . ومع ذلك فهذه المتسلسلة ليست معدودة ، وهكذا يبدو أننا لا نستطيع أن نعرف الصنف ى الذى تنتمى إليه المنطقات بغير إشارة

(١) العلاقة الغريبة علاقة ليست لأى حد مع نفسه . ويرجع وضع هذا الاصطلاح إلى شرودر ، انظر Schroder, Algebra u. Logik der Relative p. 131.

إلى علاقتين مولدتين . والصنف « هو صنف المتسلسلة الملتحمة التي لا طرف لها والتي تكون حدودها بالصلة مع علاقة أخرى متوالية .

وتتبين بوضوح من الملاحظة الأخيرة أهمية ترابط المتسلسلات الذي بدأنا به المناقشات في الجزء الخامس . لأنه [ما] يمكن فقط بواسطة الترابط أن يعرّف صنف المنطقات وأن يعرّف حينئذ المتواصل . وإلى أن نهتدي إلى علاقة ما أخرى غير تلك التي بها ينشأ ترتيب المقدار بين المنطقات . فلا يوجد شيء به تميز صنف المنطقات من صنف اللامنطقات .

٢٩٨ – البحث في الترتيبات التي لا تقبل التعبير كدوال « يبين بوضوح أن الترتيبات بوجه عام لا بد أن تعتبر – كما اقترحت في بداية هذا الباب – كفصول أو أصناف لعلاقات متسلسلة . ومن الظاهر أن كانتور نفسه يتمسك الآن بهذه الوجهة من النظر ، إذ في المقالة التي نشرها في Mathematiche Annalen Vol. XLVI يتحدث عنها دائماً كأصناف من الترتيب لا كأعداد . وفي المقالة التي تليها (Math. Annalen, XLIX, § 12) يقصر بلا نزاع الأعداد الترتيبية على المتسلسلات المحكمة الترتيب . وفي كتاباته الأولى كان ينحاز أكثر إلى دوال « التي لها شبه كثير بأنواع الأعداد المألوفة ، فهذه في الواقع أصناف من الترتيب يمكن أن تقدمها متسلسلات من الأصليات المتناهية والمتصاعدة التي تبدأ بعدد أصلي ما . غير أن بعض الأصناف الأخرى من الترتيب لها كما رأينا الآن شبهاً قليلاً جداً بالأعداد .

٢٩٩ – ويجدر بنا إعادة تعاريف الأفكار العامة التي نحن بصددها في صيغة ما يمكن تسميته بحساب العلاقة[(١)] . إذا كانت ق ، ع علاقتين بحيث يكون هناك علاقة واحد بواحد ل مداها ق بحيث أن ع = لˇ ق ل ، إذن ق ، ع يقال إنهما « شبيهان » . وفصل العلاقات الشبيهة بـ ق ، والذي أدل عليه بالرمز ن ق ، يسمى عدد علاقة ق . فإذا لم يكن لمجالي ق ، ع حدود مشتركة ، يعرف ق + ع بأنه ق أو ع أو العلاقة التي تقوم بين أي حد من مجال ق وأي حد من مجال ع ، ولا تقوم بين أي حدود أخرى . وهكذا فإن ق + ع لا تساوي ع + ق . وأيضاً

(١) انظر الجزء الرابع الباب الرابع والعشرين الفقرة ٢٢١

ري ت ي ق تعرف بأنها ر (ق ١ ي) . والحصول على مجموع summation عدد لا متناه من العلاقات نحتاج إلى علاقة غريبة مجالها مركب من علاقات مجالاتها متباعدة فيما بينها . وليكن ق مثل هذه العلاقة وليكن ن مجالها بحيث يكون ق فصل علاقات . إذن ي ق ق تدل إما على علاقة من علاقات الفصل ق أو علاقة أي حد ينتمي مجال علاقة ما لا من الفصل ن مع حد ينتمي لمجال علاقة أخرى ع (من الفصل ق) له مع لا العلاقة ق . (إذا كانت ق علاقة متسلسلة ، ق فصل علاقات متسلسلة ، كانت ي ق العلاقة المولدة لمجموع المتسلسلات المتعددة المتولدة من حدود ق مأخوذة بترتيب المتولد من ق) . وقد نعرف مجموع أعداد علاقة الحدود المتعددة لـ ق بأنه عدد علاقة ي ق . فإذا كانت جميع حدود ق لها نفس عدد العلاقة ، وليكن ا ، وكانت ب عدد علاقة ق ، فإن ا × ب تعرف بأنها عدد علاقة ي ق . فإذا سرنا في هذا الطريق كان من السهل إثبات بوجه عام القوانين الثلاثة الصورية التي تنطبق على المتسلسلات المحكمة الترتيب وهي :

(ا + ب) + حـ = ا + (ب + حـ)

ا (ب + حـ) = ا ب + ا حـ

(ا ب) حـ = ا (ب حـ)

والبراهين شديدة الشبه بما اكتشفه الأستاذ هوايتهد خاصاً بالأعداد الأصلية (Amer. Journal of Math. Vol. XXIV) ولكنها تختلف في أن أحداً لم يكتشف بعد طريقة لتعريف حاصل الضرب اللانهائي لأعداد العلاقة أو حتى للأعداد الترتيبية .

٣٠٠ ــ ينبغي ملاحظة أن مزية الطريقة السابقة هو أنها لا تفسح المجال لأي شك في النظريات الوجودية ــ وهي نقطة أهملت مباحث كانتور فيها شيئاً يحتاج إلى إيضاح . ولما كان هذا الأمر على جانب كبير من الأهمية ويقف فيه الفلاسفة موقف الشك ، سأعيد هنا الحجة مرة أخرى بوجه عام . ولنبدأ بقولنا إنه من الممكن بيان أنه لا فصل متناه يحيط بجميع الحدود : وينتج ذلك بقليل من الالتفات عن هذه الحقيقة وهي أنه ما دام ن عدداً أصلياً ، فعدد الأعداد منه إلى ن بما فيه ن هو ن + ١ . ثم إذا كان ن عدداً متناهياً ، كان ن + ١ عدداً

جديداً متناهياً مبايناً لجميع سوابقه . وبذلك تكون الأصليات المتناهية متوالية ، وحينئذ يوجد العدد الترتيبي ω ، والعدد الأصلي ا١ (بالمعنى الرياضي) . وعندئذ نحصل بمجرد إعادة ترتيب متسلسلة الأصليات المتناهية على جميع الترتيبات من الفصل الثاني لكانتور . ويمكن الآن تعريف العدد الترتيبي ω١ بأنه فصل العلاقات المتسلسلة بحيث إذا كان ى فصلا يحتويه مجال أحد تلك الفصول ، فالقول بأن ى له توال يستلزم القول ويلزم عن القول بأن ى له ا١ من الحدود أو عدد متناه من الحدود . ومن السهل بيان أن متسلسلة الترتيبات من الفصلين الأول والثاني بترتيب المقدار هي من هذا الصنف . وبناء على ذلك يقوم البرهان على وجود ω١ ؛ ويعرف ا١ بأنه عدد الحدود ى متسلسلة علاقتها المولدة من الصنف ω١ . ومن ثم نستطيع أن نتقدم نحو ω٢ ، ا٢ ، بل إلى ω ω ، ا ω ، ووجودها يمكن البرهنة عليه بالمثل : بأن ω ω هو صنف العلاقة المولدة لمتسلسلة بحيث إذا كان ى فصلا تحتويه المتسلسلة فالقول بأن ى له توال successors. يكافئ القول بأن ى متناه أو له ω من الحدود بفرض قيمة مناسبة متناهية ل ω . وهذه العملية تعطينا ترابط واحد بواحد بين الترتيبات والأصليات . ومن الواضح أننا ببسط العملية نستطيع أن نجعل كل عدد أصلي يمكن أن ينتمي لمتسلسلة محكمة الترتيب يناظر عدداً ترتيبياً واحداً غير . ويفترض كانتور كبديهية أن كل فصل فهو مجال متسلسلة ما محكمة الترتيب ، ويستنتج أن جميع الأصليات يمكن أن ترتبط بالترتيبات بالطريقة المذكورة . ويلوح لي أن هذا الافتراض لا أساس له وبخاصة بالنسبة لهذه الحقيقة وهي أن أحداً لم ينجح بعد في ترتيب فصل الحدود ٢ ا١ في متسلسلة محكمة الترتيب . ولسنا نعرف أنه إذا علم أي عددين أصليين مختلفين فلا بد أن يكون أحدهما الأكبر . وربما لم يكن ٢ ا١ أكبر ولا أصغر من ا٢ - ا١ وتواليهما وهي التي يمكن أن تسمى أصليات محكمة الترتيب ، لأنها تنطبق على فصول محكمة الترتيب .

٣٠١ — وثمة صعوبة بالنسبة لصنف كافة متسلسلة الأعداد الترتيبية في السهل إثبات أن كل قطعة من هذه المتسلسلة محكمة الترتيب ، ومن الطبيعي افتراض أن المتسلسلة كلها محكمة الترتيب أيضاً . وإذا كان الأمر كذلك وجب أن يكون صنفها أكبر جميع الأعداد الترتيبية ، لأن الترتيبات الأصغر من ترتيبي معلوم تكون بترتيب المقدار متسلسلة صنفها هو الترتيبي المعلوم . ولكن لا يمكن أن يكون هناك عدد ترتيبي هو الأكبر لأن كل عدد ترتيبي يزيد بإضافة ١ . وقد استدل

بورالى فورتى من هذا التناقض الذى اكتشفه [١] على أن عددين ترتيبين ، وكما هى الحال فى عددين أصليين ، إذا كانا مختلفين فليس من الضرورى أن يكون أحدهما الأكبر والآخر الأصغر . وهو فى هذه المسألة يعارض عن وعى إحدى نظريات كانتور التى تثبت العكس [٢] . وقد امتحنت هذه النظرية بعناية ما أمكننى من العناية فعجزت عن تبين أى خلل فى البرهان [٣] وفى برهان بورالى فورتى مقدمة أخرى يلوح لى أنها أدعى للإنكار ، وهى أن متسلسلة جميع الأعداد الترتيبية محكمة الترتيب ، فهذا لا يلزم عن القول بأن جميع قطعها محكمة الترتيب . ولا بد فى رأيى أن ترفض ما دامت فيما أعلم قاصرة عن البرهنة . وبهذا السبيل يلوح أن التناقض المذكور يمكن تجنبه .

٣٠٢ — نستطيع الآن أن نرجع إلى موضوع المشتقات المتتالية لمتسلسلة مما قد ناقشناه فى إيجاز فى الباب السادس والثلاثين . ويكون هذا الموضوع أحد التطبيقات الشديدة الطرافة لتلك الترتيبيات التى هى دوال س . بل ربما يستخدم كطريقة مستقلة لتعريفها . وقد رأينا من قبل كيف نحصل على أول مشتقة من متسلسلة ى [٤] . فأول مشتقة من ى والذى نعطيه الرمز ى′ هو فصل نقطها النهائية . ويكون ى″ وهو المشتقة الثانية من ى′ من النقط النهائية لـ ى′ ؛ وهكذا . ولكل مجموعة لا متناهية نقطة نهاية واحدة على الأقل : مثال ذلك س هو نهاية الترتيبيات المتناهية . ويمكن أن نعرف بالاستنباط أى مشتقة من الترتيب المتناهى لـ ى ن . إذا كان ى ن مكوناً من عدد متناه من النقط ، فإن ى ن+١ يتلاشى . وإذا حدث ذلك لأى عدد متناه ن ، قيل إن ى من الجنس الأول ومن النوع النونى . ولكن قد يحصل ألا يتلاشى ى ن ، وفى هذه الحالة ربما يكون لجميع

(١) "Una Questione sui numeri transfiniti," Rendiconti del circolo Matematico di Palermo, Vol. XI (1897).

(٢) النظرية N فى الفقرة ١٥ من مقالة كانتور فى مجلة Math. Annalen, Vol. XLIX,

(٣) قد أعيد البرهان فى صورة مبسطة بحيث يمكن الكشف بسهولة عن الأخطاء فى مجلة R. d. M., Vol. VIII, Prop. 5, p. 43.

(٤) التعريف مذكور أيضاً بمقتضى .Acta Math. II, pp. 341 – 360 ويلاحظ أيضاً أن كل مجموعات قابلة للتعريف غير موجودة ، أى يمكن لمتسلسلة مترابطة ألا تكون لها نقطة نهاية . وقد رأينا فى الباب السادس والثلاثين كيف نقرر الشروط بحيث نتجنب هذا الاعتراض ، ولكن الإطناب الضرورى لذلك هنا .

المشتقات المتناهية نقط مشتركة، والنقط التي لها جميعاً باشتراك تكوّن مجموعة نعرف بأنها ق $^\omega$. وينبغي ملاحظة أن ق $^\omega$ تعرَّف على هذا النحو دون حاجة إلى تعريف س، وينتهي الحد س إلى ق $^\omega$ إذا كان س منتمياً إلى ق $^\nu$ بفرض أن ب أي عدد صحيح متناه. وينبغي ملاحظة أنه مع أن ق $^\omega$ قد تشتمل على نقط لا تنتمي لـ ق، إلا أن المشتقات التابعة لا تدخل نقطاً جديدة . وهذا يوضح الطبيعة الخالقة لطريقة النهايات أو بالأحرى القطع . وهي حين تطبق أولا ربما أنتجت حدوداً جديدة ، ولكن التطبيقات المتأخرة لا تعطي حدوداً أخرى . ومعنى ذلك أن هناك فرقاً ذاتياً بين متسلسلة حصلنا عليها أو ربما كنا قد حصلنا عليها كمشتقة من متسلسلة ما أخرى ، وبين متسلسلة لم نحصل عليها بهذه الطريقة . وكل متسلسلة تحتوي أول مشتقة لها فهي نفسها مشتقة من عدد لا متناه من متسلسلات أخرى [١] . والمشتقات المتتالية كالقطع المحددة بواسطة الحدود المتعددة المتراجعة، تكوّن متسلسلة كل حد فيها جزء من كل سابق من سابقاتها . وعلى ذلك ق $^\omega$ إن وجدت هي النهاية الدنيا لجميع مشتقات الترتيب المتناهي . ومن السهل أن نصعد من ق $^\omega$ إلى ق $^{\omega+1}$ ، ق $^{\omega+2}$. إلخ . ويمكن تركيب متسلسلات بالفعل أول ما يتلاشى فيها هو أي مشتقة معينة . متناهية كانت أو متصاعدة من الفصل الثاني . فإذا لم تتلاش أي مشتقة من المشتقات المتناهية يقال إن ق من الجنس الثاني . ومع ذلك لا ينبغي أن نستنتج من ذلك أن ق غير معدودة . بالعكس أول مشتقة من المنطقات هو المتواصل العددي number-continuum وهو بسبب أنه كامل فإن جميع مشتقاته متطابقة مع نفسها . ومع ذلك فالمنطقات كما نعرف معدودة ، ولكن حين تتلاشى ق $^\alpha$ تكون ق دائماً معدودة إذا كانت α متناهية أو من الفصل الثاني .

نظرية المشتقات عظيمة الأهمية بالنسبة لنظرية الدوال الحقيقية [٢] ، حيث

---

(١) Formulaire de Mathématique, Vol. II, Part III, § 71, 4 ·1

(٢) انظر Dini, Theorie der Functionen, Leipzig 1892, وخاصة الباب [illegible] عشر ومقدمة المترجم

تمكننا عملياً من تطبيق الاستنباط الرياضي على أي ترتيب من الفصل الثاني . ولكنه بالنسبة للفلسفة يلوح أنه ليس من الضروري أن نبسط القول أكثر مما ذكرناه في الملاحظات السابقة وفي الباب السادس والثلاثين . ويمكن القول بلغة دارجة إن أول مشتقة تتكون من جميع النقط يتراكم في جوارها عدد لا متناه من حدود المجموعة . وهكذا من السهل أن نتبين لم كانت المشتقات لها بالمتواصل مدخل : فالمجموعة لكي تكون متصلة لا بد أن تكون مركزة ما أمكن في كل جوار يحتوي أي حدود من المجموعة . ولكن مثل هذه الضروب الدارجة من التعبير تقصر عن الدقة الموجودة في اصطلاحات كانتور .

الباب التاسع والثلاثون

الحساب اللانهائي الصغر

٣٠٣ ــ الحساب اللانهائي الصغر هو الاسم التقليدي لحساب التفاضل والتكامل معاً ، ومن حيث هو كذلك فقد احتفظت به ، على الرغم مما سيتبين لنا بعد قليل أنه لا توجد أي إشارة إلى اللانهائي الصغر ، أو أي لزوم عنه في أي جزء من هذا الفرع من الرياضيات . أحيطت النظرية الفلسفية للحساب التحليلي منذ اختراع هذا الموضوع بظروف تكاد تكون مشينة بعض الشيء . فهذا ليبنتز نفسه ــ ومن المفروض أنه كان يجب أن يكون أكفأ من يعطي رأياً صحيحاً عن اختراعه ــ كانت له أفكار عن هذا الموضوع لا يمكن أن توصف إلا بأنها فجة إلى أقصى حد . ويلوح أنه ذهب إلى أننا إذا اطرحنا جانباً دقائق الميتافيزيقا ، فإنما يكون الحساب التحليلي تقريبياً فقط ، ولكنه يبرر من الناحية العملية بأن الأخطاء التي تنشأ عنه أقل من أخطاء الملاحظة[1] . وعند ما كان يفكر في الديناميكا ، عاقه اعتقاده في اللانهائي الصغر بالفعل من اكتشاف أن الحساب التحليلي يعتمد على مذهب النهايات ، وجعله لا يعتبر دس ، دص كأنهما صفر ، أو متناهيان ، أو أوهام رياضية ، بل على أنهما يمثلان الوحدات التي كان من المفروض في فلسفته أن تؤدي إليها القسمة اللامتناهية[2] . وفي عرضه الرياضي للموضوع تجنب إعطاء براهين دقيقة مكتفياً بسرد القواعد[3] . حقاً إنه ينكر في أوقات أخرى اللانهائيات الصغر أن تكون صحيحة فلسفياً[4] ، ولكنه فشل في بيان كيف تكون النتائج الحاصلة بواسطة الحساب التحليلي مضبوطة لا تقريبية

(١) Mathematical Works, Gerhardt's ed. IV, 91-93; Phil. Works, Gerhardt's ed. II, p. 282.

(٢) Math. Works, Gerhardt's ed. VI, pp. 235, 247, 252.

(٣) Math. Works, Gerhardt's ed. Vol. V, pp. 220 ff.

(٤) انظر Phil. Works, Gerhardt's ed. II, p. 305 وكذلك Cassirer, Leibniz's System (Marburg, 1902), pp. 206-7.

بدون استخدام اللانهائيات الصغر . ونيوتن فى هذا الصدد أفضل من ليبنتز[١] ؛ لأن مأخوذاته تعطى الأساس الصحيح ؛ فحساب التحليل فى مذهب النهايات ، وبفرض اتصال المكان والزمان بالمعنى الكانتورى ، فإنها تعطى أدلة صحيحة على قواعدها بمقدار ما يتصل بالمقادير الإمكانية . غير أن نيوتن كان بطبيعة الحال جاهلا تماماً بهذه الحقيقة وهى أن مأخوذاته تعتمد على النظرية الحديثة للاتصال . وفضلا عن ذلك فإن الرجوع إلى الزمان والتغير وهو الذى يظهر فى لفظة الفرق fluxion ، وإلى المكان الذى يظهر فى المأخوذات ، كان غير ضرورى بالكلية . وإنما أفاد فقط فى إخفاء الواقع من أنه لا تعريف للاتصال كان قد أعطى . ويبدو من المشكوك فيه جداً أن ليبنتز تجنب هذا الخطأ . وعلى كل حال من المؤكد أنه فيما نشره لأول مرة عن الحساب التحليلى عرف معامل التفاضل بواسطة مماس المنحنى . وكان تأكيده جانب اللانهائى الصغر سبباً فى إساءة توجيه النظر إلى الحساب التحليلى مما أدى إلى تضليل جميع الرياضيين قبل فيرشتراس (وربما باستثناء ديمورجان) وجميع الفلاسفة إلى وقتنا الحاضر . ولم يتسن للرياضيين إلا منذ ثلاثين أو أربعين عاماً أن يضعوا الأسس اللازمة لفلسفة الحساب التحليلى . وهذه الأسس ليست كما هو الطبيعى معروفة إلا قليلا بين الفلاسفة وفيما عدا الفرنسيين[٢] . أما المؤلفات الفلسفية عن الموضوع مثل كتاب Cohen, Princip der Infinitesimal methode und seine Geschichte[٣] فهى مشوبة فيما يختص بالنظرية التركيبية بضرب من الغموض الموروث عن كانط ، والذى يؤدى إلى نتائج كالتطابق بين مفهوم المقدار وبين ما صدقات اللانهائى الصغر[٤] . وسأفحص فى الباب المقبل مفهوم اللانهائى الصغر مما يعد ضرورياً لجميع النظريات الفلسفية المنشورة حتى الآن عن الحساب التحليلى . أما الذى يعنينى الآن فهو تقديم النظرية التركيبية بحسب استنتاجها من الرياضيات الحديثة .

---

(١) Principia Part I Section I.

(٢) انظر Couturat, De l'Infini Mathématique passim

(٣) Berlin, 1883. وينبغى أن نقول إن الكاتب الذى هو مؤلفه رائع .

(٤) المرجع السابق ص ١٥ .

٣٠٤ – يعتمد معامل التفاضل أساساً على فكرة دالة متصلة لمتغير متصل . وإذا أردنا تعريف هذه الفكرة وجدنا أنها ليست ترتيبية بحتة ، بالعكس إنها تنطبق أولا على متسلسلة الأعداد فقط ، ثم بعد ذلك تبسط لتشمل المتسلسلات التي تكون فيها المسافات أو الامتدادات قابلة للقياس عددياً . ولكن علينا قبل كل شيء أن نعرّف الدالة المتصلة .

رأينا من قبل (الباب الثاني والثلاثين) ما المقصود بدالة المتغير ، وما المقصود بالمتغير المتصل (الباب السادس والثلاثين) . إذا كانت الدالة أحادية القيمة ، وكانت مرتبة فقط بالترابط مع المتغير فعندئذ لا معنى للسؤال عن الدالة أهي متصلة حين يكون المتغير متصلا ، لأن مثل هذه المتسلسلة الموجودة بالترابط تكون دائماً متشابهة ترتيبياً بنموذجها الأصلي . أما حين يكون للدالة ترتيب مستقل عن الترابط ، كما هو الحال عند ما يكون كلا المتغير ومجال الدالة فصلين من الأعداد ، فربما يحدث وربما لا يحدث أن تكون قيمُ الدالة بالترتيب الحاصل عن الترابط متسلسلة متصلة بالترتيب المستقل . فإذا فعلت قيم الدالة ذلك في أي فترة قيل إن الدالة متصلة في تلك الفترة . ويعطي دينى Dini تعريفين دقيقين للدالتين المتصلة والمنفصلة حيث يكون كلا س ، د (س) عدديين بما يأتي . المتغير المستقل س يعتبر مكوّناً من الأعداد الحقيقية ، أو من جميع الأعداد الحقيقية في فترة معينة . وبذلك د (س) في الفترة المعينة تكون أحادية القيمة حتى في نقط أطراف الفترة ، وتكون أيضاً مركبة من أعداد حقيقية . وعندئذ نحصل على التعريفين الآتيين من حيث أن الدالة تعرف لفترة بين ى ، ع حيث ا عدد حقيقي ما في هذه الفترة .

« نسمي د (س) « متصلة » للقيمة س = ا ، أو في النقطة ا التي يكون لها القيمة د (ا) ، إذا وجد لكل عدد موجب ى ، مختلف عن ، ولكنه يبلغ من الصغر ما شئنا ، عدد موجب ى ، مختلف عن ، ، بحيث يكون الفرق د (ا + ة) – د (ا) أصغر عددياً من ى ، لجميع قيم ة الأصغر عددياً من ى . بعبارة أخرى د (س) تكون متصلة عند النقطة س = ا حيث يكون لها القيمة د (ا) ، إذا

---

(١) المرجع السابق ، الفقرة ٣٠ ، ص ٥٠ ، ٥١ .

كانت نهاية قيمها عن يمين ا هي ذاتها نهاية قيمها عن شمال ا وكان كل منهما يساوى د (ا) » .

« د (س) تسمى « منفصلة » لقيمة س = ا إذا لم يوجد لأى[1] قيمة موجبة ǫ قيمة مناظرة موجبة δ ، بحيث أنه لجميع قيم δ الأصغر عددياً من δ ، د (ا + δ) — د (ا) يكون دائماً أصغر من ǫ . بعبارة أخرى د (س) تكون منفصلة لقيمة س = ا عند ما تكون قيم د (ا + هـ) للدالة د (س) على يمين ا ، وقيم د (ا — هـ) للدالة د (س) على شمال ا ، ليس لكل منهما نهاية محدودة ، أو إذا كان لهما مثل هذه النهاية فهما مختلفان على جانبى ا ، أو إذا كانا نفس النهاية اختلفا عن قيمة د (ا) التي تكون للدالة فى النقطة ا » .

هذان التعريفان لاتصال الدالة وانفصالها لا بد من الاعتراف أنهما معقدان بعض الشيء . ولكن يبدو من المستحيل إدخال أى تبسيط دون التضحية بالدقة . بعبارة دارجة يمكن القول إن الدالة تكون متصلة فى جوار ا عند ما تكون قيمها كلما اقتربت من ا تقترب من قيمة د (ا) ، وتكون د (ا) نهاية هذه القيم على اليمين والشمال على السواء . ولكن فكرة نهاية الدالة فكرة أكثر تعقيداً من فكرة النهاية بوجه عام ؛ وهى تلك الفكرة التى كانت محل بحثنا حتى الآن . والدالة إذا كانت من نوع عام تماماً ، فلن يكون لها نهاية كلما اقتربت من نقطة معينة . ولكى يكون لها نهاية ، كلما اقتربت س من ا من الشمال ، فيجب ويكفى أنه إذا ذكر أى عدد ǫ ، فأى قيمتين لـ د (س) عند ما تكون س قريبة بما يكفى من ا ولكنها أصغر من ا فالفرق بينهما أصغر من ǫ . وبلغة دارجة قيمة الدالة لا تحدث طفرات فجائية كلما اقتربت س من ا من الشمال . وتحت ظروف مشابهة د (س) تكون لها نهاية كلما اقتربت س من ا من اليمين . ولكن هاتين النهايتين حتى إذا وجدا كلاهما فليس من الضرورى أن يكونا متساويتين فيما بينهما ، ولا مع د (ا) وهى قيمة الدالة عند ما تكون س = ا . ويمكن بذلك وضع الشرط الدقيق للنهاية المتناهية المحدودة[2] :

---

(١) الألفاظ (لا الإيضاحية) بمعنى « كل » every لا بمعنى « أى » any . ولكن هذه غلطة قلم .

(٢) Dini — المرجع السابق ص ٣٨ .

« لكي يكون لقيم ص على يمين أو شمال عدد متناه أ (وليكن على اليمين) نهاية متناهية محدودة يجب ويكفي أن يكون لكل عدد صغير موجب ε اخترناه حسب ما نشاء عدد موجب ء بحيث أن الفرق ص أ+ء — ص أ+ة بين قيمة ص أ+ء أعني للقيمة س = أ+ء وبين قيمة ص أ+ة التي تناظر قيمة أ+ة لقيمة س ، يجب أن يكون أصغر عدديًا من ε لكل ة أكبر من ٠ وأصغر من ء » .

ويجوز بدلا من تعريف نهاية الدالة ذلك التعريف ثم الشروع بعد ذلك في مناقشة أمر وجودها : أن نعرف بوجه عام فصلا بأسره من النهايات (١) . وفي هذه الطريقة ينتمي العدد ع إلى فصل نهايات ص لقيمة س = أ ، إذا كانت ص أقرب إلى ع من أي فرق معلوم ، وذلك داخل نطاق أي فترة تحتوي أ مهما تكن صغيرة . مثال ذلك أن حا $\frac{1}{س}$ كلما اقتربت س من الصفر ستأخذ جميع القيم من — ١ إلى + ١ (بما فيها — ١ ، ٠ ، ١) في كل فترة متناهية تحتوي الصفر مهما تكن صغيرة . وهكذا فإن الفترة من — ١ إلى + ١ تكون في هذه الحالة فصل النهايات لقيمة س = ٠ وهذه الطريقة مزية أن فصل النهايات يكون موجودًا أبدًا . وعندئذ يسهل تعريف « النهاية » بأنها العضو الوحيد في فصل النهايات في حالة ما إذا كان هذا الفصل ليس له إلا عضو واحد فقط . ويلوح على الفور أن هذه الطريقة أبسط وأعم .

٣٠٥ — وحيث قد اتفقنا على معنى الدالة المتصلة ونهاية الدالة فقد نستطيع الخوض في مسألة مشتقة الدالة أو العامل التفاضلي . كان من المفروض سابقًا أن جميع الدوال المتصلة يمكن أن تفاضل ولكن اتضح الآن أن ذلك الرأي باطل . لأن بعضها يمكن أن تفاضل في كل موضع ، وبعض الآخر في كل موضع إلا في نقطة واحدة ، وأخرى تفاضل في كل موضع على اليمين ولكن في بعض الأحيان لا تفاضل على الشمال ، والبعض تحتوي عددًا لامتناهيًا من النقط في أي فترة متناهية لا يمكنها فيها أن تفاضل مع أن عددًا أكبر لا متناهيًا من النقط يمكن فيها أن تفاضل ، والبعض أخيرًا ، وهذه في الحقيقة هي أعم فصل ، لا يمكن أن تفاضل

(١) انظر Formulaire, Part III, § 73 . 1 . 4 ; Peano, Rivista di Matematica, vi, pp. 77

فى أى موضع ألبتة[١] . ولكن الشروط التى فيها يمكن أن تفاضل الدالة مع أنها على بعض الأهمية لفلسفة المكان والزمان إلا أنها لا تتطلب مناقشتها كبير عناية . وعلى كل حال لا بد لنا أولا أن نعرف ما التفاضل .

إذا كانت د (س) دالة متناهية ومتصلة فى النقطة س ، عندئذ قد يحدث أن يكون الكسر .

$$\frac{د (س + ى) - د (س)}{ى}$$

له نهاية معينة كلما اقترب ى من الصفر . فإذا حدث ذلك رمزنا للنهاية بالرمز د' (س) . ونقول إنها المشتقة أو تفاضل د (س) فى النقطة س . أى إذا وجد عدد ما ط بحيث إنه إذا علم أى عدد ، مهما صغر ، وكان ى أى عدد أصغر ولكنه موجب ، إذن $\frac{د (س \pm ى) - د (س)}{\pm ى}$ يختلف عن ط بأقل من ء ، وإذن ط هى مشتقة د (س) فى النقطة س . وإذا لم توجد النهاية المذكورة ، عندئذ د (س) ليس لها مشتقة عند النقطة س . فإذا لم تكن د (س) متصلة عند هذه النقطة ، فالنهاية لا توجد . وإذا كانت د (س) متصلة فربما وجدت النهاية وربما لم توجد .

٣٠٦ — النقطة الوحيدة الجديرة بالملاحظة فى الوقت الحاضر هى أن هذا التعريف لا يلزم عنه اللانهائى الصغر . فالعدد ى دائماً متناه . وليس فى تعريف النهاية ما يلزم عنه العكس . والواقع $\frac{د (س \pm ى) - د (س)}{ى}$ معتبراً كدالة ى فهو غير معين بالكلية عند ى = ٠ ، ونهاية الدالة لقيمة معلومة للمتغير المستقل هى كما رأينا فكرة مختلفة تماماً عن قيمتها للقيمة المذكورة للمتغير المستقل ، والاثنتان ربما كانتا نفس العدد وربما لم تكونا . وفى الحالة الراهنة قد تكون النهاية معينة ، ولكن قيمتها عند ى = ٠ لن يكون لها معنى . وعلى ذلك فإن مذهب النهايات هو الذى يقوم فى أساس الحساب التحليلى لا أى استخدام مزعوم للانهائى الصغر . وهذه هى النقطة الوحيدة ذات الأهمية الفلسفية فى الموضوع الراهن ، ولم أستدرج القارىء إلى هذا القدر الكبير من الرياضة إلا لتوضيح هذه النقطة .

---

(١) Dini, op. cit. Chapters X, XI, XII. Encyclopädie der Math. Wissenschaften, Band II, Heft. Leipzig, 1899, cap. pp. ... — ...

٣٠٧ ـ قبل بحث اللانهائي الصغر ذاته يبقى علينا أن نعرف التكامل المعين ، وأن أبين أن هذا أيضاً لا يتطلب اللانهائي الصغر . أما التكامل غير المعين الذي هو مجرد عكس التفاضل ، فليس بذي أهمية عندنا . ولكن التكامل المعين فله تعريف مستقل لا بد أن نفحصه بإيجاز ، فنقول :

كما أن مشتقة الدالة هي نهاية كسر ، كذلك التكامل المعين فهو نهاية مجموع [1] . ويمكن تعريف التكامل المعين بما يأتي : لتكن د (س) دالة أحادية القيمة ، ومتناهية في الفترة من ا إلى ب (وكلاهما داخلان) . اقسم هذه الفترة إلى أي ن من الأجزاء بواسطة (ن ـ ١) من النقط س١ ، س٢ ، . . . . . . س ن ـ ١ ، وارمز بقولك ق١ ، ق٢ ، . . . . ق ن على الفترات التي عددها ن وهي س١ ـ ا ، س٢ ـ س١ ، . . . . ب ـ س ن ـ ١ ، وفي كل فترة من هذه الفترات ق ر ، خذ أي قيمة من القيم ولتكن د (ى ر) التي تأخذها د (س) في هذه الفترة ، واضرب هذه القيمة في الفترة ق ر . ثم استخرج مجموع مج د (ى ر) ق ر . وسيكون هذا المجموع دائماً متناهياً . فإذا كان هذا المجموع كلما تزايدت ن إلى نهاية معينة ، مهما نختار د (ى ر) في فترتها ، ومهما يكن اختيارنا للفترات (بشرط فقط أن تكون كلها أصغر من أي عدد معين لقيم ن الكبيرة كبراً كافياً) عندئذ تسمى هذه النهاية الواحدة بالتكامل المعين للدالة د (س) من ا إلى ب . فإذا لم توجد مثل هذه النهاية ، فإن د (س) ليست قابلة للتكامل من ا إلى ب .

٣٠٨ ـ ليس لنا إلا ملاحظة وحيدة على هذا التعريف . كما فعلنا في حالة المشتقة . فالتكامل المعين لا يتطلب اللامتناهي ولا اللانهائي الصغر ، وليس هو نفسه مجموعاً ولكنه فقط بالضبط نهاية مجموع . وجميع الحدود التي تقع في المجموع الذي نهايته التكامل المعين فهي متناهية . والمجموع نفسه متناه . ولو افترضنا بلوغ النهاية بالفعل لصح أن يكون عدد الفترات لامتناهياً ، وأن يكون

---

(١) تعريف التكامل المعين يختلف بعض الشيء باختلاف مؤلفات الحساب . أنظر في ذلك Dini, op. cit. §§ 179–181; Jordan, Cours d'Analyse, Vol. I, Paris, 1893, Chap. I, §§ 59; Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, II A 2 § 31.
والتعريف بأنه نهاية مجموع أكثر توضيحاً من أي تعريف آخر من حيث إنه يمكن تعميمه ، وكذلك فهو دائرى وأوبار ثم عاده نوعي ـ انظر أمر تاريخي .

مقدار كل منها لا نهائياً في الصغر . ولكن في هذه الحالة يصبح المجموع ولا معنى له . على ذلك لا يجب أن نعتبر المجموع على أنه بالغ بالفعل نهايته . ولكن هذا الوجه هو من الوجوه التي تتفق فيها المتسلسلات عامة . وأي متسلسلة تصعد دائماً ، أو تهبط دائماً ، وليس لها حد أخير . فلا يمكن أن تبلغ نهايتها . وبعض المتسلسلات الأخرى اللامتناهية ، ربما ، كان لها حد يساوي نهايتها ، ولكن إذا كان الأمر كذلك فهذا محض مصادفة . أما القاعدة العامة فهي أن النهاية لا تنتمي للمتسلسلة التي هي نهاية لها . وفي تعريف المشتقة والتكامل المعين ، إنما نجد مثالاً آخر على هذه الحقيقة . فما يسمى بالحساب اللانهائي الصغر إذن لا شأن له باللانهائي الصغر ، وله فقط مدخل بطريق غير مباشر في اللامتناهي - وارتباطه باللامتناهي جاء من أنه يتضمن النهايات ، وأن المتسلسلات اللامتناهية وحدها لها نهايات .

التعاريف المذكورة ما دامت تستدعي الضرب والقسمة فهي حسابية أساساً ، وهي على خلاف تعاريف النهايات والاتصال لا يمكن أن تجعل ترتيبية بحتة . ولكن من الواضح أنها قد تبسط فوراً لتشمل أي مقادير تقاس عددياً ، فتشمل عندئذ جميع المتسلسلات التي يمكن أن تقاس فيها الامتدادات أو المسافات . ولما كانت أنواع المكان والزمان والحركة داخلة تحت هذا العنوان . فالحساب التحليلي ينطبق على الهندسة والديناميكا . أما عن البديهيات الداخلة في الافتراض بأن الدوال الهندسية والديناميكية يمكن أن تفاضل وتكامل فسأتحدث عن ذلك فيما بعد . أما في الوقت الحاضر فالوقت مناسب لإجراء فحص نقدي للانهائي الصغر لذاته .

الباب الأربعون

اللانهائي الصغر واللامتناهي المعتل

٣٠٩ – كان الاعتقاد عموماً حتى الزمن الحديث أن الاتصال والمشتقة والتكامل المعين تتطلب بالفعل كلها اللانهائيات الصغر . أي أنه حتى إذا أمكن تحرير تعاريف هذه المفاهيم صوريا من الذكر الصريح للانهائي الصغر ، إلا أنه حيث تطبق التعاريف فلا بد دائما أن يوجد اللانهائي الصغر بالفعل . وقد هُجر هذا الاعتقاد الآن بوجه عام . والتعاريف التي أعطيناها في الأبواب السابقة لا تتضمن بأي حال اللانهائي الصغر ، ويلوح أن هذا المفهوم قد أصبح من الناحية الرياضية عديم الفائدة . وفي الباب الحاضر سأعطي أولا تعريف اللانهائي الصغر ، ثم أفحص الأحوال التي تنشأ فيها هذه الفكرة . وأختم الباب بمناقشة نقدية للاعتقاد بأن الاتصال يستلزم اللانهائي الصغر .

كان تعريف اللانهائي الصغر بوجه عام غاية في الإبهام . إذ اعتبر بأنه عدد أو مقدار مع أنه ليس صفرا فهو أصغر من أي عدد أو مقدار متناه . فقد كانت د س أو د ص المستخدمتان في الحساب التحليلي هي الزمن الذي تكون فيه كرة قذفت رأسيا إلى فوق ساكنة عند أعلى نقطة من سيرها ، أو المسافة بين نقطة على خط وبين النقطة التالية ، إلخ ، إلخ . ولكن ولا فكرة من هذه الأفكار مضبوطة على الإطلاق لأن د س ، د ص كما رأينا في الباب السابق ليسا شيئا ألبتة . لأن $\frac{د ص}{د س}$ نهاية كسر بسطه ومقامه متناهيان . ولكن الكسر ليس في ذاته كسرا ألبتة . أما الزمن الذي تكون فيه الكرة ساكنة في أعلى نقطة فإنها فكرة معقدة جدا تتطلب النظرية الفلسفية كلها للحركة . وسنرى في الجزء السابع من هذا الكتاب أنه لا يوجد مثل هذا الزمن بعد تقدم البحث في هذه النظرية . والمسافة بين النقط المتعاقبة تفترض في أساسها وجود نقط متعاقبة – وهو رأي يوجد ألف سبب لإنكاره . وكذلك الشأن في معظم الحالات – فإنها لا تعطي تعريفا دقيقا لما نعنيه باللانهائي الصغر .

٣١٠ - لا يوجد بمقدار ما أعلم سوى تعريف واحد مضبوط يجعل اللاتناهي الصغر فكرة نسبية بحتة مترابطة مع شيء يتخذ تحكميا بأنه متناه . أما حين نعتبر بدلا من ذلك ما أخذ بأنه اللاتناهي الصغر متناهيا . فالفكرة المترابطة معه هي التي يسميها كانتور اللامتناهي المعتل (Uneigentlich-Unendliches) . ونحصل على تعريف العلاقة المذكورة بإنكار بديهية أرشميدس ، كما حصلنا على المتصل بإنكار الاستنباط الرياضي . وإذا كان ب ، ج أي عددين أو أي مقدارين قابلين للقياس ، فإنهما متناهيان كل منهما بالنسبة للآخر بفرض أن ب الأصغر عندما يوجد عدد صحيح متناه ن بحيث إن ن ب أكبر من ج . ووجود مثل هذا العدد الصحيح هو الذي يكون بديهية أرشميدس وتعريف التناهي النسبي . ويلاحظ أنه يفترض في أساسه تعريف التناهي المطلق بين الأعداد — وهو تعريف يعتمد كما رأينا على نقطتين : (١) ارتباط العدد ١ بالفكرة المنطقية عن البساطة ، أو ارتباط الصفر بالفكرة المنطقية للفصل الصفري ؛ (٢) مبدأ الاستنباط الرياضي . ومن الواضح أن فكرة التناهي النسبي متميزة عن التناهي المطلق ، لأن الأخيرة إنما تنطبق فقط على الأعداد والفصول والانقسامات بحيث أن الأولى تنطبق على أي مقدار قابل للقياس . وأي عددين أو فصلين أو انقسامين إذا كانا متناهيين بإطلاق فهما أيضا متناهيان نسبيا . ولكن العكس غير صحيح . مثال ذلك $\aleph_0$ ، $\aleph_0 \times 2$ ؛ بوصة وقدم ؛ يوم وسنة . فهي أزواج متناهية نسبيا ، ولو أن جميع هذه الأزواج الثلاثة تتكون من حدود لامتناهية مطلقا .

يجري إذن تعريف اللاتناهي الصغر واللامتناهي المعتل improper على النحو الآتي : إذا كان ب ، ج عددين أو مقدارين قابلين للقياس من نفس النوع ، وإذا كان ن أي عدد صحيح متناه شئنا وكان ن ب دائما أصغر من ج ، إذن ب لاتناهي الصغر بالنسبة إلى ج ، و ج متناه بالنسبة إلى ب . وفيما يختص بالأعداد ليست هذه الحدود النسبية مطلوبة ، لأنه في الحالة المفروضة إذا كان ب متناهيا مطلقا ، إذن ج لا متناه مطلقا ، على حين أنه إن أمكن أن يكون ج متناهيا مطلقا ، لكان ب لاتناهي الصغر مطلقا — وهي حالة سنرى سببا لاستحالتها . وعلى ذلك سأفترض في المستقبل أن ب ، ج ليسا عددين ، ولكنهما مقداران من نوع بعضه على الأقل

يقبل القياس عدديا . وينبغي ملاحظة أنه بالنسبة للمقادير بديهية أرشميدس هي السبيل الوحيد لا لتعريف اللانهائي الصغر فقط ، بل واللامتناهي أيضا . وليس لدينا ما نقوله عن المقدار الذي لا يقبل القياس عدديا سوى أنه أكبر من بعض نوعه وأصغر من بعضه الآخر ولكنا لا نستطيع أن نحصل على اللانهاية من مثل هذه القضايا ، لأنه حتى إذا سلمنا بوجود مقدار أكبر من جميع المقادير الأخرى من نوعه ، فليس ثمة ما يدعو إلى اعتباره لامتناهيا . صفوة القول : التناهي واللانهاية فكرتان عدديتان أساساً ، وإنما بعلاقتهما بالأعداد فقط يمكن تطبيقهما على أمور أخرى .

٣٦١ ــ السؤال الذي يلي ما سبقت مناقشته هو : أي حالات للانهائيات الصغر علينا أن نبحث عنها ؟ ومع أن الموجود من الحالات أقل جدا مما سبق لنا افتراضه ، إلا أنه لا يزال يوجد بعض الحالات الهامة . ولنبدأ بقولنا إننا إذا كنا على صواب في اعتبار الانقسام divisibility مقداراً ، فمن الواضح أن انقسام أي كل يحتوي عددا متناهيا من الأجزاء البسيطة ، فهو لانهائي الصغر بمقارنته مع كل آخر يحتوي عدداً لامتناهيا . فإذا أخذنا عدد الأجزاء كقياس كان كل كل لامتناه أكبر من أي كل متناه من المرات ، مهما يكن عدد ن متناهيا . فهذه إذن حالة مثال واضح تماماً . ولكن لا يجب افتراض أن نسبة الانقسام في كلين أحدهما على الأقل متصاعد ، يمكن أن تقاس بواسطة نسبة العددين الأصليين لأجزائهما البسيطة . ويوجد سببان لتعليل العجز عن هذا الإمكان ، أولهما أنه لا يوجد لعددين أصليين متصاعدين أي علاقة شبيهة بالضبط بالنسبة . حقا تعريف النسبة يجرى بواسطة الاستنباط الرياضي . وعلاقة أصليين متصاعدين ا ، حـ المعبر عنها بالمعادلة ا ب = حـ تحمل في طياتها شبها معينا بنسب الأعداد الصحيحة ، ويمكن استخدام ا ب = حـ د لتعريف نسب أخرى . ولكن النسب المعرّفة على هذا النحو ليست شبيهة تماما بالنسب المتناهية . والسبب الثاني الذي من أجله لا يجب أن تقاس الانقسامات اللامتناهية بواسطة الأعداد الأصلية هو أن الكل يجب دائما أن يكون له من الانقسامات أكثر مما لجزءه (بشرط ألا يكون الجزء الباقي لانهائي الصغر نسبيا) ، ولو أن الكل ربما كان له نفس العدد

المتصاعد . جملة القول : الانقسامات كالترتيبات متساوية ما دامت الكلات متناهية عندما ، وعندما فقط ، تكون الأعداد الأصلية ى الكلات واحدة . ولكن فكرة مقدار الانقسام متميزة عن فكرة العدد الأصلى ، وتفترق عنها بوضوح عندما ننظر فى الكلات اللانهائية .

الكلات اللامتناهيان قد يكونان بحيث أن أحدهما أقل انقساماً إلى ما لا نهاية له من الآخر . خذ مثلا طول خط مستقيم متناه ، ومساحة المربع على الخط المستقيم ؛ أو طول خط مستقيم متناه وطول الخط المستقيم كله الذى هو جزء منه (باستثناء مسافات محدودة منه) ؛ أو مساحة وحجم ؛ أو الأعداد المنطقة والأعداد الحقيقية ؛ أو مجموعة نقط على جزء متناه من خط حاصل بطريقة فون شتاوت لرسم الشكل الرباعى quadrilateral construction وكافة مجموعة النقط على الجزء المتناهى المذكور [١] . فهذه كلها مقادير من نوع واحد بالذات هو الانقسامات ، وكلها انقسامات لا متناهية ، ولكنها من مراتب كثيرة مختلفة . فالنقط على جزء محدود من خط حاصل بطريقة رسم الشكل الرباعى تكون مجموعة لانهائية الصغر بالنسبة إلى الجزء المذكور - وهذا الجزء لانهائى الصغر ترتيبيا [٢] بالإضافة لأى مساحة محوطة بحدود ؛ وأى مساحة من هذا النوع فهى لانهائية الصغر ترتيبيا بالنسبة لأى حجم محدود ، وأى حجم محدود (باستثناء فراغات متناهية) لانهائى الصغر ترتيبيا بالنسبة لكل الفراغ . وفى جميع هذه الحالات تستخدم لفظة « لانهائى الصغر » بدقة حسب التعريف المذكور الحاصل من بديهية أرشميدس . أما ما يجعل هذه اللانهائيات الصغر غير مهمة بعض الشىء من الناحية الرياضية فهو أن القياس يعتمد أساساً على بديهية أرشميدس ، ولا يمكن بوجه عام أن يمتد بواسطة الأعداد المتصاعدة للأسباب التى شرحناها من قبل . وعلى ذلك يُعتبر عادة الانقسامان اللذان يكون أحدهما لانهائى الصغر بالنسبة للآخر نوعين مختلفين من المقدار ، واعتبارهما من نفس النوع لا يعطى أى مزية سوى الصحة الفلسفية . ومع ذلك فكلها بالضبط أمثلة للانهائيات الصغر ، ومتسلسلاتها توضح جيدا نسبية المصطلح « لانهائى الصغر » .

---

(١) انظر الجزء السادس الباب الخامس والأربعين .

(٢) انظر الجزء السادس الباب الرابع والأربعين ص ٢٩٧ .

وهناك طريقة طريفة للموازنة بين مقادير معينة شبيهة بانقسامات أي مجموعات لامتناهية من النقط ، وبين مقادير الامتدادات المتصلة ، وهي طريقة يقدمها شتولز [١] ، كما يقدم كانتور [٢] طريقة شديدة الشبه بها ولكنها أعم . وهاتان الطريقتان رياضيتان إلى الحد الذي لا نستطيع أن نشرحهما بتمام في هذا المقام ، ولكنا قد نشرح كنه طريقة شتولز بإيجاز . لتكن مجموعة من النقط س تحويها فترة ما متناهية من ا إلى ب ، ثم اقسم الفترة إلى أي عدد ن من الأجزاء ، ثم اقسم كلا من هذه الأجزاء إلى أي عدد من الأجزاء ، وهكذا ، ثم اجعل الأقسام المتتابعة بحيث تصبح جميع الأجزاء على مر التقسيم أصغر من أي عدد معلوم ε . وفي كل مرحلة ضم معاً جميع الأجزاء التي تحتوي نقط من س . وفي المرحلة النهائية اجعل المجموع التابع لها ، عندئذ ربما كانت الأقسام التابعة تقل عن هذا المجموع ، ولكنها لا يمكن أن تزيد عليه ، ومن ثم كلما ازداد عدد الأقسام فإن لها يجب أن يقترب من النهاية هـ . فإذا كانت س ملتحمة خلال الفترة ، سنحصل على هـ = ب — ا . فإذا تلاشت أي مشتقة متناهية من س ، كانت هـ = ٠ ومن الواضح أن هـ لها شبه بالتكامل المعين ، ولكن ليست هناك شروط لازمة لوجود هـ ، ولكن هـ لا يمكن أن تتطابق مع الانقسام ، لأن بعض المتسلسلات الملتحمة ، مثلا متسلسلات المنطقات أقل انقساماً من غيرها كالمتواصل ، ولكنها تعطي نفس قيمة هـ .

٣٤٢ — الحالة التي افترضنا من قبل أن تكون فيها اللانهائيات الصغر واضحة بوجه خاص هي حالة المتسلسلات الملتحمة ، في هذه الحالة من المحتمل البرهنة أنه لا يمكن وجود قطع لانهائية الصغر [٣] بشرط إمكان القياس العددي أصلا — فإذا لم يكن ممكناً ، لن يكون اللانهائي الصغر كما رأينا معروفاً . فأولا من الواضح أن القطعة المحوية بين حدين مختلفين فهي دائماً قابلة للانقسام إلى ما لا نهاية له . لأنه ما دام هناك حد حـ بين أي حدين ا ، ب ، فهناك حد آخر د بين ا ، حـ وهكذا ، وبذلك لا يمكن أن تشتمل أي قطعة محدودة بنهاية على عدد متناه من الحدود .

(١) Math. Annalen 33, "Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth".

(٢) انظر المرجع السابق Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, No. 6.

(٣) انظر Peano, Rivista di Matematica Vol. II, pp. 58 – 62

ولكن القطع المعرفة بفصل من الحدود قد لا يكون لها (كما رأينا في الباب الرابع والثلاثين) حد نهائي . ففي هذه الحالة ستحتوى القطعة حداً ما آخر ب ، وإذن عدداً لانهائياً من الحدود ، بشرط ألا تتكون القطعة من حد مفرد ، وبذلك تكون جميع القطع متقسمة إلى ما لا نهاية له . والنقطة الثانية أن نعرف القطع الكبيرة . القطعتان المنتهيتان يمكن جمعهما بوضع قطعة مساوية لإحداهما عند آخر الأخرى لتكوين قطعة جديدة . فإذا كانت القطعتان متساويتين فإن القطعة الجديدة ضعف كل منهما . أما إذا لم تكن القطعتان منتهيتين لم يمكن استخدام هذه العملية . وفي هذه الحالة يعرف بيانو مجموعهما بأنه حاصل الجمع المنطقي لجميع القطع الحاصلة من جمع قطعتين منتهيتين متضمنتين على التوالي في القطعتين المزمع جمعهما . وبعد تعريف هذا المجموع يمكن أن نعرف أي تضعيف multiple متناه من القطع . وبذلك يمكن تعريف فصل الحدود المتضمن في تضعيف ما ، متناه من قطعتنا ، أنه مثلا المجموع المنطقي لجميع تضعيف المتناهي . وإذا كانت قطعتنا تخضع لبديهية أرشميدس وذلك بالنسبة لجميع القطع الأكبر ، فإن هذا الفصل الجديد سيحوى جميع الحدود التي تأتي بعد أصل قطعتنا . ولكن إذا كانت قطعتنا لانهائية الصغر بالنسبة لأي قطعة أخرى . عندئذ سيعجز الفصل المذكور عن أن يحتوى بعض نقط هذه القطعة الأخرى . وفي هذه الحالة يتبين أن جميع التضعيفات المتصاعدة لقطعتنا يساوي بعضها بعضها الآخر . ومن ثم يترتب على ذلك أن الفصل المتكون من المجموع المنطقي لجميع التضعيفات المتناهية لقطعتنا ، والذي يمكن أن نسميه التضعيف اللامتناهي لقطعتنا ، يجب أن يكون قطعة غير منتهية non-terminated لأن القطعة المنتهية terminated تتزايد دائماً بالتضعيف . ويخلص الأستاذ بيانو من ذلك بقوله : « وكل نتيجة من هذه النتائج متناقضة مع الفكرة المألوفة عن القطعة . ولأن القطعة اللانهائية الصغر لا يمكن أن نجعل نهائية بواسطة أي ضرب لانهائي بالفعل . فإني أستنتج متفقاً في ذلك مع كانتور أنها لا يمكن أن تكون أحد عناصر المقادير المتناهية » (ص ٦٢) . ولكني أظن أننا يمكن أن نصل إلى نتيجة أوثق . لأننا رأينا في التسلسلات الملتحمة أن هناك قطعة

---

(١) المرجع السابق ص ٦١ ، بند ٩ .

قطع تناظر كل قطعة . وأن هذه القطعة من القطع تتناهى دائما بقطعتي المعرفة . أكثر من ذلك أن القياس العددي لقطع القطع هو بالضبط نفس القياس للقطع البسيطة . وبناء على ذلك بتطبيق النتيجة السابقة على قطع القطع نحصل على تناقض معين . ما دامت ولا واحدة منها يمكن أن تكون غير منتهية . والقطعة اللانهائية الصغر لا يمكن أن تكون منتهية .

أما في حالة الأعداد المنطقة أو الحقيقية فإن معرفتنا التامة الحاصلة لنا عنها تجعل عدم وجود اللانهائيات الصغر مبرهنا عليه . فالعدد المنطق هو نسبة عددين صحيحين متناهيين . وأي نسبة من هذا القبيل فهي متناهية . والعدد الحقيقي ما عدا الصفر فهو قطعة من متسلسلة المنطقات . وعلى ذلك إذا كان س عدداً حقيقيا خلاف الصفر . فهناك قطعة ي ليس صفرا من المنطقات بحيث إذا كان س = أحد ي . وكان ط أصغر من س . كان ط أحد س . أي ينتمي للقطعة التي هي س . إذن كل عدد حقيقي بخلاف الصفر فهو قطعة تحوي منطقات . وجميع المنطقات متناهية . ويترتب على ذلك أن كل عدد حقيقي فهو متناه . بناء على ذلك إذا أمكن أن نتحدث بأي معنى عن الأعداد اللانهائية الصغر فلابد أن تكون بمعنى جديد ما أصلا .

٣١٣ – وأعرض الآن لمسألة في غاية الصعوبة كان بودي ألا أذكر عنها شيئا . وأعني بها مسألة مراتب اللانهاية ولا نهائية الدوال في الصغر . وقد انقسم أعظم الثقات حول هذه المسألة . فيذهب دبوص ريموند وشتولز وكثيرون غيرهما إلى أن هذه تكون فصلا خاصا من المقادير تقع فيها اللانهائيات الصغر بالفعل . على حين يقرر كانتور بشدة أن النظرية كلها باطلة[1] . ولنضع المسألة بأبسط ما يمكن فنقول : ليكن دالة د (س) نهايتها صفر كلما اقتربت س من الصفر . فقد يحدث أن النسبة $\frac{د(س)}{س^{م}}$ ، إذا فرضنا م عدداً ما حقيقيا متناهيا ، لها نهاية متناهية كلما اقتربت س من الصفر . ولا يمكن وجود من مثل ذلك لعدد إلا واحد فقط . وربما لا يوجد أي واحد . عندئذ قد يسمى م إن وجد مثل هذا العدد الرتبة التي تصبح عندها د (س) لانهائية الصغر ، أو رتبة الصغر د (س) كلما اقتربت س من

---

(١) انظر Stolz, *Allgemeine Arithmetik*, Part I, Leipzig, 1885, Section IX; Du Bois Reymond, *Allgemeine Functionentheorie*, 1882, p. 279 ff.; Vivanti, Giornale di Matematica, XV, pp. ...

الصفر . ولكن عند بعض الدوال مثل $\frac{١}{لو س}$ لا يوجد مثل هذا العدد م . فإذا كان م أي عدد حقيقي متناه، فنهاية $\frac{١}{س^م لو س}$ كلما اقتربت س من الصفر لانهائية . بعبارة أخرى عندما تكون س صغيرة صغراً كافياً ، يكون $\frac{١}{س^م لو س}$ كبيرا جدا ، ويمكن أن يجعل أكبر من أي عدد معين بجعل س صغيرة صغرا كافيا — وهذا صحيح مهما يكن العدد المتناهي م . وعلى ذلك : للتعبير عن رتبة صفر $\frac{١}{لو س}$ من الضروري أن نبتدع عددا جديدا لانهائي الصغر يمكن أن ندل عليه بالرمز ج . وبالمثل سنحتاج إلى أعداد كثيرة إلى غير حد للتعبير عن رتبة صفر (مثلا) $هـ^{-\frac{١}{س}}$ كلما اقتربت س من الصفر . وليس هناك آخر تتالي هذه المراتب من الصفر : مثلا $\frac{١}{لو (لو س)}$ أصغر إلى ما لانهاية له من $\frac{١}{لو س}$ وهكذا . وبذلك نحصل على سلم بأسره من المقادير ، جميع المقادير في أي فصل واحد منه لانهائية الصغر بالنسبة لجميع المقادير في أي فصل أعلى . وفي هذا السلم لا يوجد إلا فصل واحد فقط يتكون من جميع الأعداد الحقيقية المتناهية .

ويرى كانتور في هذا الشرح حلقة مفرغة . ويبدو أن كانتور على صواب على الرغم من صعوبة المسألة . فهو يعترض بأن مثل هذه المقادير لا يمكن إدخالها إلا إذا كان عندنا من الأسباب ما يجعلنا نظن أن هناك مثل هذه المقادير . فالمسألة شبيهة بتلك الخاصة باللانهايات . ويذهب كانتور إلى أنه في الحالة الحاضرة يمكن البرهنة على تناقضات محددة فيما يختص باللانهايات الصغر المفروضة . فإذا فرضنا وجود أعداد لانهائية الصغر ط . إذن حتى بالنسبة لها سنحصل على

$$نها \frac{١}{س^{ط} لو س} = ٠ \quad عندما \; س = ٠$$

ما دامت $س^{ط}$ يجب آخر الأمر أن تزيد على ب . وهو يبين أنه حتى الدوال المتصلة

والمتفاضلة والمتنظمة الزيادة قد يكون لها رتبة مبهمة بالكلية من الصغر أو اللانهاية . الواقع أنه بالنسبة لبعض هذه الدوال تتأرجح الرتبة بين قيم لامتناهية وقيم لانهائية الصغر بحسب الطريقة التي تقترب فيها من النهاية . وعلى ذلك نستطيع أن نختم القول فيها أرى بأن هذه اللانهائيات الصغر أوهام رياضية . ويمكن تعزيز هذا القول إذا اعتبرنا أنه إن وجدت أعداد لانهائية الصغر وجدت قطع لانهائية الصغر المتواصل العددي ، كما رأينا من قبل أنه محال .

٣١٤ ــ خلاصة ما ذكرناه عن اللانهائي الصغر أنه أولا حد نسبي ، وأنه فيما يختص بالمقادير خلاف الانقسامات ، أو انقسامات الكلات اللامتناهية بالمعنى المطلق ، فليست لها القدرة أن تكون شيئاً آخر غير حد نسبي . أما حيث يكون لها معنى مطلق حينئذ لا يتميز هذا المعنى عن التناهي . وقد رأينا أن اللانهائي الصغر ولو أنه عديم الفائدة كلية في الرياضيات ، إلا أنه يقع فعلاً في بعض الحالات ، مثال ذلك أطوال الخطوط المستقيمة المحدودة . فهي لا نهائية الصغر بالنسبة لمساحات المضلعات . كما أن هذه لانهائية الصغر بالنسبة لأحجام كثيرات السطوح . ولكن مثل هذه الحالات الحقيقية من اللانهائيات الصغر هي كما رأينا معتبرة دائما عند الرياضيين كمقادير من نوع آخر إذ لا موازنة عددية ممكنة ، حتى بواسطة الأعداد المتصاعدة بين المساحة والطول ، أو بين الحجم والمساحة . الواقع القياس العددي يعتمد بالكلية على بديهية أرشميدس ، ولا يمكن أن يمتد ، كما فعل ذلك كانتور في الأعداد . ورأينا أخيرا أنه لا توجد قطع لانهائية الصغر في المتسلسلات المتصلة ، وأن ــ مما هو مرتبط بذلك ارتباطا وثيقا ــ مراتب صغر الدوال لا ينبغي أن نعتبر كلا نهائيات الصغر الحقيقية . يمكن إذن أن نختم القول بأن اللانهائي الصغر تصور محدود جدا ولا أهمية له رياضيا ، وأن اللانهاية والاتصال مستقلان على السواء عنه .

الحجج الفلسفية الخاصة باللاتناهي الصغر

٣١٥ ــ أتممنا الآن عرضنا الموجز لما تريد الرياضة أن تقوله فيما يختص بالاتصال ، واللانهاية ، واللاتناهي الصغر . ونستطيع هنا إذا لم يكن فلاسفة سابقون قد بحثوا هذه الموضوعات أن نقفل المناقشة وأن نطبق مذاهبنا على المكان والزمان . لأنني أعتد بالرأي المناقض من أن ما يمكن البرهنة عليه رياضياً فهو صادق . وحيث إنه يكاد أن يكون جميع الفلاسفة ممن يخالفون هذا الرأي ، وحيث إن كثيرين قد كتبوا حججاً بارعة في تأييد وجهات من النظر مباينة لما بسطناه من قبل ، فمن الضروري أن نفحص بطريقة جدلية الأصناف الرئيسية للنظريات المقابلة ، وأن ندافع ما أمكننا عن النقط التي أختلف فيها مع الثقات من المؤلفين . ولهذا الغرض سيكون كتاب كوهين الذي أشرنا إليه من قبل مفيداً بوجه خاص ، ليس فقط لأنه يبحث صراحة في قضيتنا الحاضرة ، بل لأنه أيضاً بسبب امتيازه في العرض التاريخي قد وقع في بعض أخطاء رياضية في غاية الأهمية . يلوح لي أن الكتاب يشتمل عليها ، وهي التي أضلت غيره من الفلاسفة ممن ليست عندهم معرفة مباشرة بالرياضيات الحديثة[1] .

٣١٦ ــ في العرض المذكور من قبل ظهر التفاضل كأنه تطبيق غير هام فلسفياً لمذهب النهايات . والواقع لولا أهميته التقليدية ما استحق منا مجرد الذكر . وقد رأينا أن تعريفه لا يتطلب حتماً كائن اللاتناهي الصغر . لأن د ص ، د س في التفاضل ليسا بذاتهما شيئاً ، وليس د ص/د س كسراً . من أجل ذلك حتى في المؤلفات الحديثة عن الحساب التحليلي الاصطلاح دَ (ص) على د ص/د س ، ما دامت الصورة الأخيرة توحي بمفاهيم خاطئة . وقد نلاحظ أن الاصطلاح دَ (ص) أكثر شبهاً برمز نيوتن ص٠ ، ويرجع هذا التشابه إلى هذه الحقيقة وهي أن الرياضيات الحديثة في هذه النقطة أكثر توافقاً مع نيوتن منها مع ليبنتز . لقد استخدم ليبنتز الصورة د ص/د س لأنه كان

(١) قارن مقال مستر ر . لاتا ، في مقالة "On the Relation of the Philosophy of Spinoza and that of Leibniz" Mind N. S. No. 11.

يعتقد في اللانهائيات الصغر . أما نيوتن فهو يقرر جازماً أن الفروق Fluxions التي يقول بها ليست كسراً . وفي ذلك يقول : « تلك النسب النهائية التي تتلاشى معها الكميات ليست حقاً نسب كميات نهائية ، بل نهايات تتقارب منها دائماً نسب الكميات المتناقصة بغير نهاية ، وتقترب منها بأقرب من أي فرق معلوم »(١) .

ولكن عندما نتجه نحو مؤلفات مثل كتاب كوهين نجد أن د س ، د ص يؤخذان على أنهما شيئان منفصلان ، على أنهما لانهائيان في الصغر حقيقةً ، كالعناصر الحقيقية التي منها يتكون التواصل . (الصفحات ١٤ ، ٢٨ ، ١٤٤ ، ١٤٧) . إن النظرة القائلة بأن الحساب التحليلي يحتاج إلى اللانهائيات في الصغر ليست فيما يظن نظرةً معروضة للسؤال . مهما يكن من شيء لا حجج أياً كانت تقدم لتأييدها . وهذه النظرة يفرض بكل تأكيد معظم الفلاسفة الذين يناقشون الحساب التحليلي أنها واضحة بذاتها . فلننظر نحن أي نوع من الأسس يمكن أن تقدم بها في تأييدها .

٣١٧ — كثير من الحجج المؤيدة للنظرة المذكورة يستمدها معظم الكتاب من المكان والحركة — وهي حجج يؤيدها كوهين إلى حد ما (ص ٣٤ ، ٣٧) ولو أنه يسلم بأن التفاضل يمكن أن نحصل عليه من الأعداد وحدها التي يعدها مع ذلك متبعاً في ذلك كانط متضمنةً الزمان (ص ٢٠ ، ٢١) . وحيث لم يحن الأوان بعد لتحليل المكان والحركة ، فسأقتصر في الوقت الحاضر على ذكر الحجج التي يمكن أن تستمد من أمثلة عددية بحتة . ولأجل التحديد سأستخرج بقدر الطاقة الآراء التي أجادلها من كوهين .

٣١٨ — يبدأ كوهين (صفحة ١) بقوله إن مشكلة اللانهائي الصغر ليست منطقية بحتة ، بل الأولى أنها تنتمي لنظرية المعرفة التي تتميز ، في نظره ، بأنها تعتمد على أنواع الحدس الخالص كما تنتمي للمقولات . هذا الرأي الكانطي يتعارض تماماً مع الفلسفة التي تقوم في أساس كتابي هذا ، ومناقشة هذا الرأي

---

(١) Principia, Bk. I, Section I, Lemma XI, Scholium. والشرح بأسره في غاية الأهمية ولو أن بعض أجزائه لا تخلو من أخطاء عن الفترة التي تقدم مع ...

مهما يبعدنا كثيرا عن الموضوع الذي نناقشه . وإنما ذكرته لتفسير عبارات الكتاب الذي نبحث فيه . ثم يشرع كوهين فوراً فيرفض النظرة القائلة بأن الحساب اللانهائي الصغر يمكن أن يشتق مستقلا بواسطة الرياضيات بطريقة النهايات . ويقول (ص ١) « إن هذه الطريقة تقوم على فكرة أن التصور الأولى للتساوي ينبغي أن تكمله بمفهوم مضبوط للنهاية . وهكذا نجد أولا أن تصور التساوي مفروض من قبل . . . وثانيا أن طريقة النهايات تفترض في أساسها تصور المقدار . . . ولكن المقدار النهائي مفروض قبلا في نفس الوقت في تصور المقدار المفروض من قبل ، وتساواة المعرفة في المذهب الأولى للمقدار ، لا يلتي إلى هذه المقادير النهائية بالا ، إذ في هذا المذهب المقادير تعد باعتبار أنها متساوية إذا كان فرقها يتكون من مقدار نهائي . وعلى الرغم من أن هذا الفرق هو كذلك . وعلى ذلك فإن التصور الأولى للتساوي — وهذا ليس فكرة طريقة النهايات — لا يجب أن يكمل بمقدار ما يجب أن يصحح بواسطة تصور النهاية . يجب إذن أن يعتبر التساوي مرحلة أسبق من العلاقة النهائية[١] » .

٣١٩ — نقلت هذه الفقرة كاملة لأن ما فيها من أخطاء نموذج لما يمكن أن يقع فيه غير الرياضيين . أول كل شيء لا صلة للتساوي بالنهايات . إني لأتصور أن كوهين قد طاف بذهنه مثل تلك الحالات كالدائرة والمضلع المرسوم داخلها حيث لا يمكن القول إن الدائرة مساوية لأي من المضلعات ، بل إنها فقط نهايتها . أو خذ مثالا من الحساب ، سلسلة تقاربية مجموعها π أو $\sqrt{2}$. ولكن في جميع هذه الحالات هناك كثير من الأشياء خارجة عن الموضوع وعارضة وهناك تعقيدات كثيرة غير ضرورية . وأبسط حالة على الإطلاق للنهاية هي حالة ω معتبرة كنهاية الأعداد الترتيبية . فهنا لا شك أنه لا يوجد أي نوع من التساوي . ومع ذلك ففي جميع الأحوال التي تعرف فيها النهايات بالمتواليات — وهذه هي الحالات العادية — يكون عندنا متسلسلة من الصنف الذي تعرضه كلا الترتيبات المتناهية مع ω . واعتبر مثلا المتسلسلة $2 - \frac{1}{n}$ مأخوذة مع ٢ ، حيث n يمكن أن تأخذ جميع القيم الموجبة الصحيحة المتناهية ، هنا نجد أن المتسلسلة هي من نفس الصنف كسابقتها ،

---

(١) أو نسخة « التفوق » لاكلينو في Grossenverhältniss

وهنا كما كان الأمر من قبل ٢ هو نهاية المتسلسلة . ولكن هنا – وهذا ما أضل كوشين – الفرق بين ٢ وبين الحدود المتتالية للمتسلسلة يصبح أقل من أي مقدار معين ، وهكذا يلوح أننا نحصل على صفة مميزة بين ٢ وبين الحدود المتأخرة للمتسلسلة ٢ – $\frac{1}{ن}$. ولكن دعنا نفحص هذا الأمر : إنه أولا يعتمد على أن المنطقات متسلسلة فيها مسافات هي بدورها منطقات . ولكننا نعرف أن المسافات غير لازمة للنهايات ، وأن الامتدادات تساويها في التأثير فإذا أخذنا الامتدادات في الاعتبار كان ٢ نهاية ٢ – $\frac{1}{ن}$ لأنه لا منطق يأتى بين ٢ وجميع حدود المتسلسلة ٢ – $\frac{1}{ن}$ ؛ وهذا بالضبط المعنى الذى يكون فيه $\frac{1}{ن}$ النهاية للأعداد الصحيحة المتناهية . وبسبب أن ٢ – $\frac{1}{ن}$ تكوّن متوالية أى أنها شبيهة بمتسلسلة الأعداد الصحيحة ، إنما عرفنا أن نهايتها هى ٢ . أما أن الحدود كلما تقدمنا تختلف قليلا عن ٢ ، فذلك يعتمد إما على حصولنا على متسلسلة يوجد فيها مسافة وهى حالة عرضية بعيدة عن موضوعنا ، وإما على أن الامتدادات المتتالية إلى ٢ قد تجعل أقل من أى امتداد معين إلى ٢ ، وهذا يترتب على فكرة النهاية ولكن لا شأن له بالتساوى . وحيثما كانت متسلسلتنا التى سيكون لها نهاية جزءاً من متسلسلة هى دالة ب . فالامتداد من أى حد إلى النهاية ، فهو دائما لا نهائى بالمعنى الوحيد الذى يكون فيه لكل هذه المتسلسلات امتدادات لا نهائية . وبمعنى حقيقى حد لا يصبح الامتداد أصغر كلما اقتربنا من النهاية ، لأن كلا من العدد الترتيبى والأصلى لحدوده يظل ثابتا .

لقد رأينا بما فيه الكفاية من قبل بأى معنى وإلى أى حد يدخل المقدار فى النهايات بحيث يلوح لنا من غير الضرورى الإطناب فى هذا الموضوع ههنا . والمقدار بلا نزاع « غير » داخل على معنى أن النهاية والحدود المحدودة بالنهاية لا بد أن تكون مقادير ؛ وهذا هو بلا ريب المعنى الذى تقصده كوشين . وكل متوالية تكون جزءاً من متسلسلة هى دالة ب، وفيها حدود بعد المتوالية ، فلها نهاية مهما كانت طبيعة الحدود . وكل متسلسلة قطع لا نهاية لها فى متسلسلة ملتحمة ، فلها نهاية مهما كانت طبيعة المتسلسلة الملتحمة . والآن يوجد بالطبع فى جميع المتسلسلات مقادير وهى بالذات انقسامات الامتدادات ، ولكن ليست هذه هى التى نلتمس فيها النهاية . وحتى فى حالة القطع فالنهاية قطعةٌ بالفعل لا مقدار قطعة . وكل

ما نطلبه إنما أن تكون القطع فصولا ، لا أن تكون كميات . ولكن التمييز بين الكميات والمقادير أمر بطبيعة الحال غريب بالكلية عن نظام أفكار كوهين .

٣٢٠ — ونقبل الآن على خطأ أعظم. يقول كوهين إن تصور المقدار المفروض من قبل في النهايات يعرض بدوره المقادير النهائية ، وهو يعني بالمقادير النهائية كما يظهر من السياق ، اللانهايات الصغر ، الفروق الأخيرة ، فيما افترض بين حدود متسلسلة ونهايتها . ويلوح أن ما يعنيه هو أن أنواع المقدار التي تؤدي إلى نهايات هي متسلسلات ملتحمة : ولا بد أن يوجد في المتسلسلات الملتحمة لا نهائيات في الصغر . وكل نقطة في هذا الرأي خاطئة ، لأن النهايات كما رأينا لا تحتاج إلى أن تكون نهايات مقادير ، وقطع المتسلسلة الملتحمة كما رأينا في الباب السابق لا يمكن أن تكون لا نهائية الصغر ، والنهايات لا تستلزم بأي حال أن تكون المتسلسلة التي تقع فيها ملتحمة ، وقد برهنا على هذه النقط بما فيه الكفاية من قبل فلا ضرورة للوقوف عندها أكثر من ذلك .

٣٢١ — ولكن رأس الأخطاء هو الافتراض بأن النهايات تجلب معنى جديدا من التساوي . فالتساوي له بين المقادير — كما رأينا في الجزء الثالث — معنى دقيق فريد على الإطلاق ، لأنه إنما ينطبق فقط على الكميات ، ويعني أن لها «نفس» المقدار . فلا محل ههنا للتقريب ، إذ المقصود هو ببساطة التطابق المنطقي المطلق للمقدار . أما بين الأعداد (التي يرجح أن كوهين يعتبرها كمقادير) فلا يوجد مثل هذا التساوي ، بل يوجد تطابق ، وتوجد العلاقة التي يعبر عنها عادة بعلامة التساوي كما هو الحال في المعادلة ٢×٣ = ٦ . وقد حيرت هذه العلاقة أولئك الذين حاولوا التفلسف حول الحساب إلى أن قام بيانو بشرحها[١] . عندما يكون حد واحد من المعادلة عدداً مفرداً ، بينما الآخر يكون تعبيرا مركبا من عددين أو أكثر ، فالمعادلة تدل على أن الفصل المعرف بواسطة التعبير يحوي حدا واحداً فقط هو العدد المفرد في الجانب الآخر من المعادلة . هذا التعريف مرة أخرى دقيق تماماً ، إذ ليس فيه أي شيء تقريبي ، كما أنه قاصر عن أي تعديل بواسطة اللانهايات في الصغر . وإني لأتصور أن ما يعنيه كوهين ربما عبرنا عنه بما يأتي : عند تكوين معامل

تفاضلى فلنعتبر عددين س ، س + ء س ، ثم عددين آخرين ص ، ص + ء ص . وفى الحساب الابتدائى يعتبر أن س ، س + ء س متساويان ، ولكن لا يعتبران كذلك فى الحساب التحليلى . الواقع توجد طريقتان لتعريف التساوى ، فيقال إن عددين متساويان عندما تكون نسبتهما الوحدة ، أو عندما يكون الفرق بينهما صفرا . أما إذا سمحنا باللانهايات الصغر الحقيقية ء س ، فإن س ، س + ء س سيكون لهما نسبة الوحدة ratio unity ، ولكن لن يكون الفرق بينهما صفرا ، ما دامت ء س مختلفة عن الصفر المطلق . هذه الفقرة التى أذهب إلى أنها تكافئ نظرة كوهين ، تعتمد على فهم خاطئ للنهايات والحساب التحليلى . فلا يوجد فى الحساب التحليلى هذه المقادير مثل ء س ، ء ص . هناك فروق متناهية Δس ، Δص ، ولكن لا يمكن أن تجعل أى نظرة مهما تكن ابتدائية س مساوية لـ س + Δس . وهناك نسب للفروق المتناهية ، Δص / Δس وفى الحالات التى يوجد فيها مشتقة ص ، هناك عدد واحد حقيقى يمكن أن نجعل Δص / Δس تقترب منه بحسب ما نشاء بتصغير Δس . هذا العدد الحقيقى المفرد نختاره ليدل على ءص / ءس ، ولكنه ليس كسرا ، وليس ء س ، ء ص شيئا آخر سوى حروف مطبوعة لرمز واحد . ولا يوجد أى تصحيح أيا كان لفكرة التساوى بواسطة مذهب النهايات . والعنصر الجديد الوحيد الذى أدخل ، هو اعتبار الفصول اللانهائية للحدود المفرزة من متسلسلة .

٣٢٢ – فيما يختص بطبيعة اللانهائى الصغر يخبرنا كوهين (ص ١٥) أن التفاضل ، أو الغير الممتد inextensive ، يجب أن يتطابق مع المركز the intensive ويعتبر التفاضل كتجسيد لمقولة كانط عن الحقيقة . هذه النظرة (بمقدار استقلالها من كانط) نقلها كوهين عن ليبنتز موافقا إياه عليها . أما أنا فلا بد لى من الاعتراف بأنها تخلو فيما يلوح من كل ما يبررها . ويجب ملاحظة أن ء س ، ء ص إذا أجزنا أنهما شيئان لهما وجود على الإطلاق . فلا يجب أن نطابق بينهما وبين الحدود المفردة فى متسلسلتنا ، ولا حتى مع الفروق بين الحدود المتعاقبة ، بل يجب أن تكون دائما امتدادات تحوى عددا لا نهائيا من الحدود ، أو مسافات تناظر مثل تلك الامتدادات . وهنا لا بد من التمييز بين متسلسلات الأعداد وبين

المتسلسلات التي إنما فيها نقط مسافات أو امتدادات قابلة للقياس . والمتسلسلات الثانية هي حالة الزمان والمكان . أما هنا فليس د س ، د ص نقطا أو لحظات التي هي وحدها غير ممتدة حقا ، بل إنهما أصلا أعداد : وعلى ذلك يجب أن يناظرا الامتدادات أو المسافات اللانهائية الصغر – إذ من المحال تعيين نسبة عددية لنقطتين أو : كما في حالة السرعة ، لنقطة ولحظة . ولكن د س ، د ص لا يمكن أن يمثلا مسافات النقط المتعاقبة . ولا حتى الامتداد المتكون من نقطتين متعاقبتين . وفي مقابل هذا الرأي عندنا أولا الأساس العام من أن متسلسلتنا يجب أن تعتبر ملتحمة ، مما ينفي فكرة الحدود المتعاقبة . ومن الهام أن نتجنب ذلك إذا كنا بصدد البحث في متسلسلة ليس فيها إلا امتدادات فقط لا مسافات : لأن القول بأن هناك دائما عدداً لامتناهيا من النقط المتوسطة فيما عدا عندما يتكون الامتداد من عدد متناه من الحدود ، هو مجرد تكرار . ولكن إن وجدت مسافة ، فقد يقال إن مسافة حدين ربما كانت متناهية وربما كانت لا نهائية الصغر : وأن الامتداد ليس ملتحما بالنسبة للمسافات اللانهائية الصغر ، بل يتكون من عدد متناه من الحدود . فإذا أجزنا هذا مؤقتا ، فقد يمكن إما أن نجعل د س ، د ص مسافة نقطتين متعاقبتين أو الامتدادين المركبين من نقطتين متعاقبتين . ولكن مسافة النقطتين المتعاقبتين بفرض مثلا أن كليهما يقعان على خط مستقيم واحد قد يلوح أنها ثابتة مما يعطي $\frac{دص}{دس} = ١$. ولا يمكن أن نفترض في حالات حيث كلا س ، ص متصلتان ، والدالة ص أحادية القيمة كما يتطلب الحساب التحليلي ذلك ، أن يكون س ، س + د س متعاقبتين دون أن تكون ص ، ص + د ص ، لأن كل قيمة لـ ص مترابطة مع قيمة واحدة ولا غير من س ، والعكس بالعكس . وبذلك لا يمكن أن تتخطى ص أي قيم مفروضة متوسطة بين ص ، ص + د ص . ومن ثم إذا علمت قيم س ، ص حتى بفرض اختلاف مسافات الحدود المتعاقبة من موضع إلى موضع فإن قيمة $\frac{دص}{دس}$ ستكون معينة . وأي دالة أخرى ص التي هي لقيمة ما لـ س مساوية لـ ص سيكون لها مشتقة مساوية لتلك القيمة ، وهذا خلف . فإذا اطرحنا هذه الحجج الرياضية جانبا فمن الواضح من أن د س ، د ص سيكون لهما نسبة عددية هي أنه إذا كانا مقدارين مركزين intensive كما هو

مقترح ، فلا بد أن يكونا قابلين للقياس عدديا . أما كيف تجري هذا القياس فأمر من المؤكد أنه ليس من اليسير تبينه . وربما جعلنا هذه النقطة أوضح بالاقتصار على حالتنا الأساسية التي فيها كلا س ، ص عددان . فإذا اعتبرنا س ، س + د س متعاقبين فلا بد أن نفترض إما أن ص ، ص + د ص متعاقبين ، وإما أنهما متطابقان ، وإما أن هناك عدداً متناهيا من الحدود بينهما أو عدداً لامتناهيا .

فإذا أخذنا الامتدادات لقياس د س ، د ص ، ترتب على ذلك أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ يجب أن يكون دائما صفرا ، أو عددا صحيحا ، أو لا نهائيا ، وهذا خلف . بل قد يترتب على ذلك أنه إذا كانت ص ليست ثابتة ، فيجب أن تكون $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \pm ١$. خذ مثلا ص = س^{٢} حيث س ، ص عددان حقيقيان موجبان . فكلما انتقلت س من عدد إلى ما يليه فلا بد أن تفعل ص مثل ذلك ، إذ كل قيمة لـ ص يناظرها قيمة لـ س ، وتكبر ص كلما كبرت س . وعلى ذلك إذا تخطت س العدد التالي لأي عدد من قيمها ، فلن تتمكن أبدا من الرجوع لالتقاطه . ولكننا نعرف أن أي عدد حقيقي فهو بين قيم ص . عندئذ يجب أن يكون ص ، ص + د ص متعاقبين ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١$. فإذا قسنا بالمسافات لا بالامتدادات ، فلا بد أن تثبت المسافة د س عند إعطاء س . والمسافة د ص عند إعطاء ص . فإذا كانت س = ١ ، ص = ١ إذن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢$ ولكن ما دام س ، ص هنا نفس العدد وجب أن يكون د س ، د ص متساويين ما دام كل منهما هو المسافة للعدد التالي . إذن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١$ ، وهذا خلف . وبالمثل إذا أخذنا ص دالة متناقصة ، وجدنا أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -١$.

ومن ثم كان في التسليم بالأعداد المتعاقبة القضاء المبرم على الحساب التحليلي ؛ وما دام التمسك بالحساب التحليلي واجبا ، ففي هذا الحساب القضاء المبرم على الأعداد المتعاقبة .

٣٢٣ — الفكرة القائلة بوجوب وجود أعداد متعاقبة تعززها فكرة التغير المتصل

التي تصعب تسميتها من ، ص » متغير بين ، . والتغير في الزمان موضوع مناقشته في مرحلة متأخرة ، ولكنه أثر بلا شك أعظم الأثر على صنعة الحساب التحليلي . والناس يتصورون المتغير لأنفسهم — بحق وهي غالباً — على أنه يأخذ بالتالي متسلسلة من القيم كما يحدث في مسألة ديناميكية . وعلى ذلك ربما يقولون : كيف يمكن الانتقال من من ص١ إلى ص٢ دون أن تمر بجميع القيم المتوسطة ؟ وفي هذا الانتقال أليس يجب وجود قيمة ثانية تأخذها ص عند أول تركها قيمة ص١ ؟ فكل شيء يتصور على مثال الحركة التي يفرض فيها مرور نقطة بجميع الأوضاع المتوسطة في طريقها . ولا أريد أن أقرر الآن أتكون هذه النظرة عن الحركة صحيحة أو لا ، ولكنها على أي حال بعيدة عن موضوعنا حيث يكون الأمر متعلقاً بنقطة أساسية في نظرية المتسلسلات المتصلة ، ولا بد من البت في خواص مثل هذه المتسلسلات قبل التطلع إلى الحركة لتأييد وجهات نظره . ولنرجع إلى كوهين فأقول : إني أعترف أنه يلوح عندي من الواضح أن المقدار المركز شيء مختلف بالكلية عن المقدار الممتد اللانهائي الصغر . لأن هذا يجب دائماً أن يكون أصغر من المقادير الممتدة المتناهية ، فيجب حينئذ أن يكون من نفس النوع وإياها ، أما المقادير المركزة فيظهر أنها لا تكون أبداً بأي معنى أصغر من أي مقادير ممتدة . وبذلك يظهر أن النظرية الميتافيزيقية التي علينا أن نفند بها اللانهائيات الصغر تخلو رياضياً وفلسفياً من الأسس التي يؤيدها .

٣٢٤ — بذلك لا يمكن أن نوافق على التلخيص التالي لنظرية كوهين (صفحة ٢٨) : « غاية ما أطلبه أن أتمكن من وضع عنصر بذاته ولذاته تناظر « أداة فكر » الحقيقة . ويجب أن ننصب أولاً أداة الفكر هذه كي نتمكن من النفاذ إلى ذلك التركيب مع الحدس ، أي مع الوعي بأنه معطى ، الذي يكمل في مبدأ المقدار المركز ، حيث الافتراض السابق للحقيقة المركزة كامن في جميع المادي» ، ويجب للمبدأ أن يجعل مستقلاً . هذا الافتراض السابق هو معنى الحقيقة : والسر في تصور التفاضل » . والذي يمكن أن نوافق عليه ، والذي فيما أعتقد يقوم في

غلط في أساس العبارة المذكورة. هو أن كل متواصل يجب أن يتكون من عناصر أو حدود. وهذه كما رأينا من قبل لن تحقق دالة، من ... ... التي تقع في مباحث الحساب التحليلي القديمة. وكذلك لا يمكن أن نوافق على قوله (صفحة ١٤٤): «أن هذا التناهي (أي ذلك الذى هو موضوع العلم الطبيعي) يمكن أن يقال بأنه مجموع تلك الحقائق اللامتناهية الصغر المركزة، بأنه تكامل معين»، لأن التكامل المعين ليس مجموع عناصر متواصل. على الرغم من وجود مثل هذه العناصر: مثال ذلك أن طول منحنى كما نحصل عليه بالتكامل ليس مجموع نقطه، بل بالضبط وفقط نهاية أطوال المضلع المرسوم داخله. والمعنى الوحيد الذى يمكن إعطاؤه لمجموع نقط المنحنى هو الفصل المنطقي الذى إليه تنتمي كلها، أي المنحنى نفسه لا طوله. وجميع الأطوال مقادير انقسام امتدادات. وجميع الامتدادات تتكون من عدد لا نهائي من النقط. وأي امتدادين متناهيين فلهما نسبة متناهية بين أحدهما والآخر. وليس ثمة شيء كالامتداد اللانهائي الصغر، وإن وجد فلن يكون عنصراً من المتواصل. والحساب التحليلي لا يحتاجه، وافتراض وجوده يفضي إلى متناقضات. وفيما يختص بالفكرة القائلة بأنه في كل متسلسلة لا بد من وجود حدود متعاقبة. فقد بينا في الباب الأخير من الجزء الثالث أنها تتطلب استخداماً غير مشروع للاستنباط الرياضي. وبناء على ذلك لا بد من اعتبار اللانهائيات الصغر من جهة تفسيرها للاتصال أنها غير ضرورية، ومضللة، ومتناقضة مع ذاتها.

الباب الثاني والأربعون

فلسفة المتواصل

٣٢٥ — كانت لفظة «الاتصال» continuity تحمل لدى الفلاسفة وبخاصة منذ زمن هيجل معنى لا يشبه أبداً ذلك الذي خلعه عليها كانتور . وفي ذلك يقول هيجل[1] : « للكمية كما رأينا مصدران : الوحدة المطلقة exclusive unit ، والتطابق أو التساوي بين هذه الوحدات . فإذا نظرنا في علاقتها المباشرة بنفسها ، أو في خاصية العينية الذاتية selfsameness التي نظهرها بالتجريد ، وجدنا الكمية مقداراً « متصلا » Continuous . أما عندما ننظر في خاصيتها الأخرى وهي الواحد الذي تستلزمه ، فهي مقدار « منفصل » Discrete » . وعندما نتذكر أن كلا الكمية والمقدار عند هيجل يعني بهما « العدد الأصلي » ، فقد نظن أن قوله يريد به ما يأتي : « كثير من الحدود معتبرة على أن لها عدداً أصليا يجب أن تكون كلها أعضاء في فصل واحد ، وبمقدار ما يكون كل منها مجرد حالة من فصل التصور ، فلا يتميز أحدها عن الآخر ، ومن هذا الوجه يسمى الكل الذي تركب منه « متصلا » . ولكن بالنسبة لكثرتها فيجب أن تكون حالات « متباينة » لفصل التصور ، ومن هذا الوجه يسمى الكل الذي تركب منه « منفصلا » . الحق إني بعيد كل البعد عن إنكار — الواقع أني أزعم بشدة — أن هذا التقابل بين التطابق والتعدد في مجموعة يكون مشكلة أساسية في المنطق — بل لعلها المشكلة الأساسية في الفلسفة . ولأنها أساسية فلا نزاع أنها داخلة في دراسة المتواصل الرياضي كما تدخل في كل شيء آخر . ولكن ليس لها وراء هذا الارتباط أي علاقة خاصة بالمعنى الرياضي للاتصال . كما يمكن أن نرى على الفور أنه لا صلة لها أيا كانت بالترتيب . وفي هذا الباب لن نناقش إلا المعنى الرياضي . وإنما قلت نص المعنى الفلسفي لأقرر نهائيا أنه ليس هنا موضع البحث . ولما كانت المنازعات حول الألفاظ قليلة الجدوى فلا بد أن أطالب من الفلاسفة أن يجردوا أنفسهم مؤقتا

(1) *Smaller Logic*, § 100, Wallace's Translation, p. 186.

من الروابط العادية بهذه اللفظة ، وألا يجيزوا لها من الدلالة سوى الحاصل عن تعريف كانتور .

٣٢٦ — عندما نقصر أنفسنا على المتواصل الحسابي ندخل في نزاع بطريقة أخرى مع مفاهيم سابقة متداولة . ويلاحظ بوانكاريه[١] بحق عن المتواصل الحسابي أنه : « المتواصل المتصور على هذا النحو ليس شيئاً آخر سوى مجموعة من الأفراد مرتبة بترتيب معين ، وهذه الأفراد صحيح أنها لا نهائية في العدد ، ولكن الواحد منها يقع خارج الآخر . وليس هذا هو التصور المألوف الذي نفرض فيه فيما بين عناصر المتواصل ضرباً من الرابطة الوثيقة تجعل منها كلاً ليست النقطة فيه أسبق من الخط بل الخط أسبق من النقطة . وإذا رجعنا إلى الصيغة المشهورة : المتواصل وحدةٌ في كثرة multiplicity ، وجدنا أن الكثرة وحدها هي الموجودة أما الوحدة فقد اختفت » .

ولقد ظل دائماً الموضوع مفتوحاً للبحث : هل المتواصل مركب من عناصر . وحتى حين أجيز أن يكون مشتملاً على عناصر ، فقد قيل غالباً إنه ليس « مركباً » من هذه العناصر . وهذه الوجهة الأخيرة من النظر ذهب إليها حتى أعظم مؤيد للعناصر في كل شيء ، مثل ليبنتز[٢] . غير أن جميع هذه الوجهات من النظر إنما تكون ممكنة فقط بالنسبة لمثل هذه المتواصلات كالمكان والزمان . والمتواصل الحسابي موضوع مختار بواسطة التعريف ، ويتكون من عناصر بمقتضاه . ومن المعروف أن حالة واحدة على الأقل تتضمنه هي بالذات حالة قطع الأعداد المنطقة . وسأذهب في الجزء السادس من هذا الكتاب إلى أن الفراغات هي أمثلة أخرى للمتواصل الحسابي . والسبب الرئيسي في النظريات البارعة والمتناقضة عن المكان والزمان واتصالهما ، تلك النظريات التي صاغها الفلاسفة ، هو المتناقضات المزعومة في المتواصل المركب من عناصر . والقضية المطروحة في هذا الباب هي أن متواصل كانتور يخلو من المتناقضات . وهذه القضية كما هو واضح يجب أن تتقرر على أسس ثابتة قبل أن نتمكن من الموافقة على إمكان أن يكون الاتصال الزمكاني من

---

(١) Revue de Métaphysique et de Morale, Vol. I, p. 26.

(٢) انظر مؤلف The Philosophy of Leibniz, Chap. IX.

النوع الكانتوري . وفي هذه الحجة سأفترض أن قضية الباب السابق مبرهن عليها ، وهي أن الاتصال الذي سنناقشه لا يتطلب التسليم باللانهائيات الصغر بالفعل .

٣٢٧ — في هذا العالم الموائي لست تجد شيئاً أكثر هوائية من الشهرة التي يظفر بها الكاتب بعد وفاته . ومن أبرز ضحايا فقدان الشهرة بسبب نقص الحكم هو زينون الإيلي ، الذي بعد أن اخترع أربع حجج كلها دقيقة وعميقة إلى غير حد ، حكم عليه من جاء بعده من الفلاسفة بغفلتهم أنه ليس سوى مجرد مهرج بارع ، وأن حججه كلها مغالطات . وبعد ألفي عام من الرفض المستمر أعيد لهذه المغالطات اعتبارها ، وجعلت أساس نهضة رياضية على يد أستاذ ألماني أكبر الظن أنه لم يحلم أبداً بوجود أي ارتباط بينه وبين زينون . ذلك أن فيرشتراس بعد نفيه الجازم لجميع اللانهائيات الصغر بيّن آخر الأمر أننا نعيش في عالم لا متغير ، وأن السهم في كل لحظة من انطلاقه ساكن حقاً . النقطة الوحيدة التي لعل زينون أخطأ فيها هي استنتاجه (إن كان قد استنتج) أنه حيث لا يوجد تغير ، فينبغي إذن أن يكون العالم في نفس الحالة في وقت كما يكون في وقت آخر . هذه النتيجة لا تترتب بأي حال على حججه . وفي هذه النقطة نجد الأستاذ الألماني أكثر إنشاء من اليوناني البارع . ولما كان فيرشتراس قادراً على إلباس آرائه ثوب الرياضيات ، حيث تستبعد الألفة بالحق الأفكار المتحيزة العامية الناشئة من الفطرة السليمة ، فقد استطاع أن يخلع على قضاياه ما يبدو على التفاهات من هيئة محترمة . وإذا كانت النتيجة التي انتهى إليها أقل بهجة عند محب العقل من تحدي زينون الجريء ، ففيها على كل حال قدر أكبر من الحساب يرضي جمهور الأكاديميين من الناس .

لما كانت حجج زينون تتصل بوجه خاص بالحركة ، لذلك كانت على ما هي عليه غير داخلة في عرضنا الحاضر . ولكن من المفيد ترجمتها بقدر الطاقة إلى لغة حسابية[1] .

٣٢٨ — الحجة الأولى ، وهي القسمة الثنائية ، تقول : « لا توجد حركة ، لأن ما يتحرك لا بد أن يبلغ منتصف طريقه قبل أن يبلغ آخره » . بعبارة أخرى

(١) [illegible] "Le mouvement et les arguments de Zénon d'Élée" Revue de Métaphysique et de Morale, Vol. I, pp. 107–125 [illegible]

أي حركة مهما كانت نفرض وقوعها ، فإنها تفترض من قبل حركة أخرى ، وهذه بدورها حركة أخرى ، وهكذا إلى ما لا نهاية . وعلى ذلك هناك تراجع لانهائي في مجرد فكرة أي حركة معينة . هذه الحجة ولو أنه يمكن وضعها في صورة حسابية إلا أنها تبدو حينئذ أقل استحسانا . ليكن متغير من قابل لجميع القيم الحقيقية (أو المنطقة) بين نهايتين معلومتين مثلا بين ٠ ، ١ . عندئذ متصل فيه من كل لانهائي أجزاؤه سابقة منطقيا عليه ، لأن له أجزاء ولا يمكن أن يوجد إذا نقص أي جزء من الأجزاء . على ذلك الأعداد من ٠ إلى ١ تفترض قبلا الأعداد من ٠ إلى ½ ، وهذه تفترض قبلا الأعداد من ٠ إلى ¼ ، وهكذا . ومن ثم يلوح أن هناك تراجعا لا نهائيا في فكرة أي كل لامتناه . ولكن بدون هذه الكلات اللامتناهية لا يمكن تعريف الأعداد الحقيقية ، وينهار الاتصال الحسابي الذي ينطبق على متسلسلة لامتناهية .

هذه الحجة يمكن الرد عليها بطريقتين يبدو لأول وهلة أن أي طريقة منهما كافية ، غير أن كليهما ضروري في الحقيقة . فأولا يمكن أن نميز بين نوعين من التراجع اللانهائي أحدهما لا ضرر منه . وثانيا يمكن أن نميز نوعين من الكل : المجموعي والتوزيعي ، ونقرر أنه في النوع الثاني ليست الأجزاء المتساوية التركيب مع الكل سابقة عليه منطقيا . ولا بد أن نشرح هاتين النقطتين كل منهما على انفراد .

٣٢٩ ـ التراجع اللانهائي قد يكون على نوعين . ففي النوع المعترض عليه تلتئم قضيتان أو أكثر لتكوين معنى قضية ما ، ومن هذه المكونات يوجد واحد على الأقل معناه مركب كذلك ، وهكذا إلى ما لا نهاية . وتنشأ عادة هذه الصورة من التراجع من التعاريف الدائرية . مثل هذه التعريف قد تمد بطريقة شبيهة بتلك التي فيها تنشأ الكسور المتصلة من المعادلات التربيعية . ولكن في كل مرحلة الحد المطلوب تعريفه سيعود إلى الظهور ، وحينئذ لا ينتج التعريف . خذ مثلا ما يأتي : « يقال إن شخصين عندهما نفس الفكرة عندما تكون أفكارهما متشابهة ، وتكون الأفكار متشابهة عندما تشتمل على جزء متطابق » . فلو صح أن الفكرة لها جزء ليس فكرة ، فلا اعتراض منطقيا على مثل هذا التعريف . أما إذا كان جزء الفكرة

فكرة عندئذ في الحالة الثانية حيث يقع تطابق الأفكار ، يجب أن يستبدل التعريف وهكذا . وبذلك حينما كنا بصدد « معنى » قضية ، فالتراجع اللانهائي يكون موضع اعتراض ، ما دمنا لا نبلغ أبدا قضية لها معنى محدد . ولكن كثيرا من التراجعات اللانهائية ليست من هذه الصورة . إذا كانت قضية معناها محدود تماماً ، وكانت ا تستلزم ب ، ب تستلزم جـ . وهكذا كان هذا التراجع اللانهائي من نوع لا اعتراض عليه ألبتة . وهذا يعتمد على أن اللزوم علاقة تركيبية . وأنه ولو أن ا كانت جملة من القضايا ، وكانت ا تستلزم أي قضية هي جزء منها ، فلا يترتب على ذلك بأي حال أن أي قضية تستلزمها ، هي جزء من ا . وبذلك ليست هنالك ضرورة منطقية كما كان في الحالة السابقة لتكميل التراجع اللانهائي قبل أن تكتسب ا معنى . فإذا أمكن عندئذ أن نبين أن لزوم الأجزاء في الكل عندما يكون الكل فصلا لا متناهيا من الأعداد هو من هذا النوع الثاني ، فسيفقد التراجع الذي يوحي به حجة زينون القائمة على القسمة الثنائية مزيته .

٣٣٠ — ولكي نبين أن الحالة كذلك يجب التمييز بين الكلات التي تعرف ماصدقيا extensionally ، أي بعد حدودها ، وبين تلك التي تعرف بالمفهوم ، intensionally ، أي فصل الحدود التي لها علاقة ما بحد ما معلوم ، أو بعبارة أبسط فصل من الحدود . (لأن فصل الحدود عندما يكون كلا فهو مجرد جميع الحدود التي لها فصل العلاقة لفصل تصور[1]) . ولكن الكل الماصدق — على الأقل بمقدار ما تستطيع الطاقة الإنسانية أن تمتد — هو بالضرورة متناه : فنحن لا نستطيع أن نحصي أكثر من عدد متناه من الأجزاء المنتمية لكل . وإذا كان عدد الأجزاء لا متناهيا وجب أن تعرف بطريقة أخرى خلاف العد . وهذا بالضبط ما يفعله فصل التصور : الكل الذي تكون أجزاؤه حدوداً في فصل يعرف تماماً عند تخصيص فصل التصور ؛ وأي فرد محدد ، فإما أن ينتمي أو لا ينتمي للفصل المذكور . والفرد من الفصل جزء من كل ماصدقات الفصل . وهو متقدم منطقيا على هذه الماصدقات مأخوذة جملة . ولكن الماصدق نفسه يقبل التعريف بغير إشارة لأي فرد متخصص ؛ ويوجد كشيء حقيقي حتى عندما لا يشتمل الفصل

(١) انظر ... الجزء الأول الباب العاشر والعشر ...

على أي حد . فأن نقول عن مثل هذا الفصل إنه لا نهائي هو أن نقول إنه على الرغم من أن له حدوداً إلا أن عدد هذه الحدود ليس أي عدد متناه – وهي قضية مرة أخرى يمكن تقريرها بدون تلك العملية المستحيلة من عد جميع الأعداد المتناهية . ومثله بالضبط هي حالة الأعداد الحقيقية من ٠ إلى ١ – فهي تكون فصلاً محدوداً نعرف معناه متى عرفنا المقصود من « العدد الحقيقي » و « ٠ » و « ١ » و « بين » . أما أعضاء الفصل الخاصة ، والفصول الصغيرة التي تحتويها فليست متقدمة منطقياً على الفصل . وهكذا يقوم التراجع اللانهائي على مجرد هذه الحقيقة وهي أن كل قطعة من الأعداد الحقيقية أو المتصلة عليها أجزاء هي بدورها قطع . ولكن هذه الأجزاء ليست منطقياً متقدمة عليها ، ولا ضرر ألبتة من التراجع اللانهائي . وبذلك يقوم حل الصعوبة على نظرية الدلالة وتعريف الفصل بالمفهوم .

٣٣٦ – حجة زينون الثانية هي الأشهر : وهي المتعلقة بأخيل والسلحفاة . وتجري على هذا النحو : « الأبطأ لن يلحقه الأسرع أبداً ؛ لأن المطارد يجب أولاً أن يبلغ النقطة التي منها رحل الهارب ، وبذلك يبقى الأبطأ بالضرورة دائماً متقدماً » . عند ترجمة هذه الحجة إلى لغة حسابية يتبين أنها متعلقة بترابط الواحد بالواحد لفصلين لا متناهيين . فإذا كان على أخيل أن يدرك السلحفاة ، فلا بد أن يكون طريق السلحفاة جزءاً من طريق أخيل . ولكن ما دام كل منهما في كل لحظة عند نقطة معينة من طريقه ، فالآنية تقرر ترابط واحد بواحد بين أوضاع أخيل وبين أوضاع السلحفاة . ويترتب على ذلك أن السلحفاة في أي وقت معلوم تمر بعدد من المواضع يساوي بالضبط ما يمر به أخيل . وعلى ذلك – وبذلك نرجو أن ننتهي إلى نتيجة . من المحال أن يكون طريق السلحفاة جزءاً من طريق أخيل . هذه النقطة ترتيبية بحتة ويمكن توضيحها بالحساب . خذ مثلاً ١ + ٢ س ، ٢ + س ؛ واجعل س تقع بين ٠ ، ١ وكلاهما داخلان . ولكل قيمة لـ ١ + ٢ س توجد قيمة واحدة ولا غير لـ ٢ + س ، والعكس بالعكس . على ذلك كلما تقدمت س من ٠ إلى ١ كان عدد القيم التي تأخذها ١ + ٢ س هو نفس عدد القيم التي تأخذها ٢ + س . ولكن ١ + ٢ س بدأت من ١ وتنتهي عند ٣ . أما ٢ + س فقد بدأت من ٢ وتنتهي عند ٣ . بذلك يجب أن تكون قيم ٢ + س نصف قيم

١ + ٢ س . هذه الصعوبة العسيرة جدا حلها كانتور كما رأينا ؛ ولكن لما كانت تتعلق بفلسفة اللانهاية أكثر من تعلقها بالمتواصل فسأرجئ مناقشتها إلى الباب التالي .

٣٣٢ ــ الحجة الثالثة تتعلق بالسهم . « إذا كان كل شيء ساكنا أو متحركا في مكان يساويه ، وإذا كان ما يتحرك يتحرك دائما لحظة فالسهم وهو منطلق لا يتحرك » . وقد ظل عادة أن هذه الحجة من الشناعة بحيث لا تستحق مناقشة جدية . وينبغي أن أعترف أن هذه الحجة تبدو لي أنها عبارة واضحة جدا لحقيقة ابتدائية جدا ، وقد كان إغفالها فيما أعتقد سببا في تلك الحمأة التي تردت فيها طويلا فلسفة التغير . وسأعرض في الجزء السابع من هذا الكتاب نظرية عن التغير يمكن أن تسمى « ستاتيكية » ما دامت تجيز ملاحظة زينون الصائبة . أما في الوقت الحاضر فأود أن أحجب الملاحظة عن أي إشارة للتغير ، وعندئذ نرى أنها أمر في غاية الأهمية ومن أبسط الأشياء وأعمها تطبيقا ، نعني : « كل قيمة ممكنة لمتغير فهي ثابت » . فإذا كان س متغير يمكن أن يأخذ جميع القيم من ٠ إلى ١ ، فجميع القيم التي يمكن أن تأخذها هي أعداد معينة مثل ½ أو ⅓ وهذه كلها ثوابت مطلقة . وبهذه المناسبة ربما كان من المستحسن ذكر كلمات قليلة عن المتغير . المتغير تصور أساسي في المنطق وفي الحياة اليومية على سواء . ومع أنه يكون دائما مرتبطا بفصل ما ، إلا أن ارتباطه ليس مع الفصل ، ولا مع عضو خاص في الفصل ، بل ولا مع الفصل كله ، وإنما مع « أي » عضو في الفصل . ومن جهة أخرى ليس التصور « هو » أي عضو في الفصل » ، بل التصور هو ذلك الذي يدل هذا التصور عليه . ولست في حاجة إلى التوسع في الصعوبات المنطقية على هذا التصور ، فقد ذكرنا ما فيه الكفاية عن هذا الموضوع في الجزء الأول . فالرمز المألوف في الجبر س مثلا لا يدل على عدد معين ؛ ولا على جميع الأعداد بل ولا على فصل « الأعداد » . ويمكن أن نبين هذا بسهولة من النظر إلى تطابق ما . وليكن

$$(س + ١)^٢ = س^٢ + ٢ س + ١$$

فهذه دون شك لا تدل على ما قد يحصل لو وضعنا بدل س العدد مثلا ٢٩٦ ، ولو أنها تستلزم أن نتيجة مثل هذا الاستبدال يكون قضية صادقة . ولا تدل كذلك

على ما ينتج بدلا من س حين نضع فصل التصور العدد ؛ لأننا لا نستطيع أن نضيف ١ إلى هذا التصور . ولنفس السبب أيضا س لا تدل على التصور « أى عدد » ، إذ لا يمكن إضافة ١ إليه . وإنما تدل على الانفصال المتكون من الأعداد المختلفة ، أو على الأقل يمكن أن نأخذ هذه الوجهة من النظر على أنها صحيحة إجمالا [1] . عندئذ تكون قيم س هى حدود الانفصال ، وكل حد منها ثابت . هذه الحقيقة المنطقية البسيطة يلوح أنها تكوّن جوهر ما زعمه زينون من أن السهم ساكن دائما .

٣٣٣ ـ ولكن حجة زينون تشتمل على عنصر ينطبق بوجه خاص على المتواصلات . فى حالة الحركة . تنكر الحجة وجود مثل هذا الشيء وهو « حالة » الحركة . فى الحالة العامة لمتغير متصل قد تؤخذ على أنها إنكار للانهائيات الصغر بالفعل . لأن اللانهائيات الصغر محاولة لأن تخلع على قيم متغير التغير الذى إنما ينتمى إليها وحدها . فإذا تأكد عندنا أن جميع قيم متغير ما ثوابت ، أصبح من اليسير عند أخذ « أى » قيمتين من هذه القيم أن نتبين أن الفرق بينهما متناه دائما ويترتب على ذلك عدم وجود فروق لانهائية الصغر . فإذا كان س متغيرا قد يأخذ جميع القيم الحقيقية من ٠ إلى ١ عندئذ إذا أخذنا أى اثنين من هذه القيم وجدنا أن الفرق بينهما متناه ، على الرغم من أن س متغير متصل . حقا قد يكون الفرق أصغر من الفرق الذى أخذناه . ولكن إن صح هذا لكان مع ذلك متناهيا . والنهاية الدنيا للفروق الممكنة هى صفر ، ولكن جميع الفروق الممكنة متناهية ، وليس فى هذا أى ظل من التناقض . هذه النظرية الاستاتيكية للمتغير ترجع إلى الرياضيين ، وغيابها فى زمان زينون هو الذى أفضى به إلى افتراض استحالة التغير المتصل بدون حالة من التغير مما يتطلب اللانهائيات الصغر ، والتناقض فى أن يكون الجسم موجودا حيث هو غير موجود .

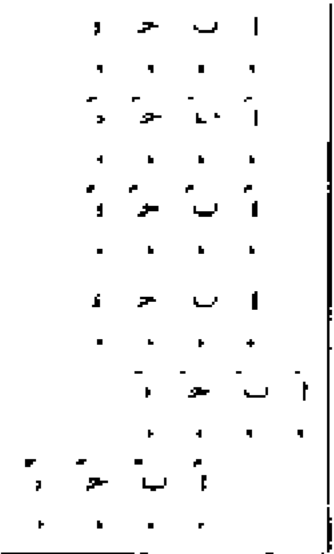
٣٣٤ ـ آخر حجج زينون هى القياس . وهى حجة وثيقة الشبه بحجة استخدمناها فى الباب السابق ضد أولئك الذين يعتبرون ء س ـ و س مسافتين لحدود متعاقبة . وهى حجة إنما توجه كما بيّن الأستاذ نويل (المرجع السابق ١٦٦)

---

(١) انظر الباب الثانى ، فقرة ٩٢ .

ضد أولئك الذين يتمسكون باللامنقسمات بين الامتدادات ، على حين تصبح الحجج السابقة للرد بما فيه الكفاية على أنصار الانقسام اللانهائي . ولنفرض مجموعة من الأوقات المنفصلة والمواضع المنفصلة ، حيث الحركة تقوم على أن الجسم في وقت يكون في أحد هذه المواضع المنفصلة ، وفي وقت آخر في موضع آخر .

ثم تخيل ثلاثة خطوط متوازية مركبة من النقط ا ، ب ، حـ ، د ؛ اَ ، بَ ، حـَ ، دَ ؛ اً ، بً ، حـً ، دً ؛ على التوالي



افرض أن الخط الثاني يتحرك في لحظة واحدة جميع نقطه إلى اليمين بموضع واحد ، على حين يتحرك الخط الثالث جميع نقطه بموضع واحد إلى الشمال . عندئذ ولو أن اللحظة لا منقسمة إلا أن حـً التي كانت فوق حـَ وأصبحت الآن فوق اَ لا بد أن تكون قد مرت بـ بَ في أثناء اللحظة . إذن اللحظة منقسمة ، خلافاً للفرض . هذه الحجة هي فرضاً تلك التي أثبت بها في الباب السابق أنه إذا وجدت حدود متعاقبة إذن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \pm ١$ دائماً ؛ أو بالأحرى هذه هي الحجة مأخوذة مع لحظة ما فيها $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢$. ويمكن وضعها على النحو التالي : ليكن ص ، ط دالتين لـ س . وليكن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$ ، $\frac{\text{دط}}{\text{دس}} = -١$. إذن $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (ص − ط) = ٢ ؛ مما يتناقض مع المبدأ القائل بأن قيمة كل مشتقة يجب أن تكون ± ١ . ويرد الأستاذ إفلين وهو من أنصار الامتدادات اللامنقسمة على الحجة بالصورة التي وضعها زينون ، بقوله إن اً ، بَ لا تمر إحداهما بالأخرى أصلاً [1] ، لأن اللحظات إذا كانت لا منقسمة — وهذا هو الفرض — فكل ما يمكننا

(١) Revue de Métaphysique et Morale, Vol. 1, p. 386.

قوله أنه عند اللحظة التي تكون فيها ا فوق ا تكون عند اللحظة التالية حتى فوق ا . ولم يحدث شيء بين اللحظتين . وإذ نفرض أن ا ، ب قد عبرا معناه أننا نثبت المطلوب برجوع مستمر لاتصال الحركة . وهذا الرد صحيح فيما أظن في حالة الحركة . وكلا الزمان والمكان قد تذهب بغير تناقض إيجابي إلى أنهما متصلان بالجسيك بدقة بالمسافات بالإضافة إلى الامتدادات . عندئذ تصبح الهندسة والكيناتيكا والديناميكا باطلة ، ولكن ليس ثمة سبب وجيه جدا للاعتقاد أنها صواب . أما في حالة الحساب فالأمر مختلف ، إذ لا يتطلب أي سؤال تجريبي عن الوجود . وفي هذه الحالة كما نرى من الحجة السابقة عن المشتقات تكون حجة زينون سليمة تماماً . فالأعداد أشياء يمكن أن نقرر طبيعتها بلا نزاع . وصور الاتصال المتعددة التي تقع بين الأعداد لا يمكن إنكارها بغير تناقض إيجابي . ولهذا السبب كانت مناقشة مشكلة الاتصال في ارتباطها بالأعداد أفضل من مناقشتها في ارتباطها بالمكان والزمان والحركة .

٣٣٥ – رأينا أن حجج زينون ولو أنها تبرهن الشيء الكثير لا تبرهن أن المتواصل كما نتعرف عليه لا يحوي أي متناقضات أيا كانت . ومنذ أيام زينون لم تتسلح الهجمات الموجهة ضد المتواصل فيما أعرف بأسلحة جديدة أو أقوى . فلم يبق أمامنا سوى أن نذكر بعض ملاحظات قليلة عامة .

الفكرة التي يخلع عليها كانتور اسم « المتواصل » قد تسمى بالطبع بأي اسم آخر من القاموس أو من خارجه . وكل إنسان حر أن يقول إنه هو بالذات يعني بالمتواصل شيئا مختلفاً كل الاختلاف . ولكن هذه المسائل اللفظية لا جدوى منها . إن فضل كانتور لا يقوم في أنه عبر عما يعنيه غيره من الناس . بل يقوم في أنه يخبرنا ما يعنيه هو – وهي مزية تكاد تكون فريدة حيث يتعلق الأمر بالاتصال . فقد عرف بدقة وعزم فكرة ترتيبية بحتة تخلو كما نرى الآن من المتناقضات . وتكفي لجميع التحليل والهندسة والديناميكا . ولقد كانت هذه الفكرة مفروضة في أساس الرياضيات الموجودة حينئذ ، ولو أنه لم يكن من المعروف بالضبط ما الذي كان مفروضاً . وقد نجح كانتور بوضوحه الذي لا يكاد يبارى في تحليل الطبيعة الشديدة التعقيد للمتسلسلات المكانية التي بها كما سنرى في الجزء السادس فتح الباب أمام ثورة في فلسفة المكان والحركة . والنقط البارزة في تعريف المتواصل هي (١)

الارتباط بمذهب النهايات (٢) إنكار القطع اللانهائية الصغر. فإذا أخذنا في بالنا هاتين النقطتين ألقى الضوء على فلسفة هذا الموضوع بأسره.

٢٣٦ - إنكار القطع اللانهائية الصغر يحل نقيضة ظلت عويصة للمهاتلة زمنا طويلا. وأعني بهذه النقيضة أن التواصل يشتمل ولا يشتمل على عناصر في وقت واحد. ونحن نرى الآن أن كلا الأمرين ربما قيلا ولكن على معنيين مختلفين. فكل متواصل فهو متسلسلة يتكون من حدود: والحدود إن كانت لا منقسمة فهي على أي حال ليست منقسمة إلى حدود جديدة من المتواصل، وبهذا المعنى يوجد في المتواصل عناصر. أما إذا أخذنا حدوداً متعاقبة مع علاقتها اللامتماثلة باعتبار أنها تكون ما عساه أن يسمى (ولو أن ذلك ليس بالمعنى المذكور في الجزء الرابع) عنصرا ترتيبيا. عندئذ لا يكون للمتواصل بهذا المعنى عناصر. فإذا أخذنا امتدادا على أنه متسلسل تماماً بحيث يجب أن يتكون من حدين على الأقل عندئذ لا توجد امتدادات أولية. وإذا كان المتواصل من النوع الذي فيه مسافة، فكذلك لا توجد مسافات أولية. ولكن لا يوجد في أي حالة من هاتين الحالتين أي أساس منطقي للعناصر. وتنشأ الحاجة إلى حدود متعاقبة كما رأينا في الجزء الثالث من استخدام غير مشروع للاستنباط الرياضي. هذا وبالنسبة للمسافة. فليست المسافات الصغيرة بأبسط من الكبيرة، بل كلها كما رأينا في الجزء الثالث بسيطة على حد سواء. ولا تفرض قبلا المسافات الكبيرة مسافات صغيرة، لأنها من حيث إنها مقادير لا امتدادية، ربما وجدت حيث لا توجد مسافات أصغر ألبتة. وعلى ذلك، التراجع اللانهائي من مسافات أو امتدادات أكبر إلى أصغر هو من النوع الذي لا ضرر منه. وفقدان العناصر لا يجب أن يحدث لنا أي انزعاج منطقي. وبناء على ذلك تحل النقيضة. ويخلو المتواصل بتاتا على الأقل بمقدار ما أستطيع أن أتبين من المتناقضات.

ولم يبق إلا أن نبحث هل هذه النتيجة نفسها تصح بالنسبة للانهائي؟ وهو بحث نستدل به الستار على الجزء الخامس من هذا الكتاب.

الباب الثالث والأربعون

فلسفة اللانهاية

٣٣٧ – اضطررنا في مناقشاتنا السابقة للامتناهي إلى الخوض في كثير من النقاط الرياضية بحيث لم تسنح لنا فرصة كافية لبحث الموضوع بحثا فلسفيا خالصا. وأود في الباب الحاضر بعد اطراح الرياضيات أن أبحث في فكرة اللامتناهي هل يمكن أن نجد فيها أي تناقض ؟ .

كقاعدة عامة لم ير أولئك الذين اعترضوا على اللانهاية أنها مما يجدر الوقوف عندها لعرض ما فيها من متناقضات مضبوطة، إلى أن جاء كانط وفعل ذلك. فكان ذلك من أعظم حسناته. والنقيضة الرياضية الثانية المتعلقة أساساً بالمتواصل أله عناصر أو لا، فقد حلت في الباب السابق بافتراض أنه ربما وُجد اللامتناهي بالفعل – أي أنها حلت بردها إلى مسألة العدد اللامتناهي. والنقيضة الأولى تتعلق باللامتناهي ولكن بصورة زمانية أساساً. لذلك لم يكن لهذه النقيضة مدخل بالنسبة للحساب إلا على رأى كانط من أن الأعداد يجب أن تتشكل في زمان. ويؤيد هذا الرأي بالحجة القائلة بأننا نقطع زمنا في العد، وإذن بغير زمان لا يتسنى لنا معرفة عدد أي شيء. وبهذه الحجة نستطيع البرهنة على أن المعارك الحربية تقع دائما على مقربة من أسلاك البرق، لأنه لو وقع الأمر على خلاف ذلك ما سمعنا عنها شيئا. الواقع نستطيع أن نثبت بوجه عام أننا نعرف ما نعرفه. ولكن يبقى موضع نظر أننا لا نعرف ما لا نعرفه. ومن ثم تبقى الضرورة إلى الزمان ولم يقم عليها برهان.

أما غير كانط من الفلاسفة، فقد فحصنا عن أمر زينون في علاقته بالمتواصل. وسنبحث التناقض الذي يقوم في أساس حجة أخيل والسلحفاة بعد قليل. ومحاورة «بارمنيدس» لأفلاطون – ولعلها أنفس مجموعة من التناقض كتبت حتى الآن – فلا مدخل لها ههنا لأنها تدور حول صعوبات أساسية أكثر مما له صلة باللانهاية. أما هيجل فإنه لم يزل ينبه على كل كبيرة وصغيرة حتى إذا أعلن منها عن تناقض

لم نعد نحفل بذلك . وأما عن ليبنتز فهو كما رأينا يجعل التناقض القائم في أساس حجة أنتيبي ترابط الواحد بالواحد للكل والجزء . والواقع هذه هي النقطة الوحيدة التي تدور حولها معظم الحجج المناهضة اللانهاية . وسأضع فيما يلي الحجج في صورة ملائمة لمعرفتنا الرياضية الحاضرة . وهذا يغنى من اقتباس تلك الحجج عن أي واحد من قدماء المعارضين للانهاية .

٣٣٨ ـ ولنشرع أولا في عرض موجز للنظرية المثبتة للانهاية التي انتهى بنا الأمر إلى النظر فيها . إذا سلمنا بفكرة « القضية » و « مكون قضية » على أنهما من اللامعرفات ، أمكن أن ندل بالرمز ى (ا) على قضية ا أحد مكوناتها . نستطيع بعد ذلك أن نحول ا إلى متغير س ، ونعتبر ى (س) ، حيث ى (س) أي قضية مختلفة عن ى (ا) إن لم يكن اختلافا تاما فيكفي أن شيئا آخر ما يظهر في موضع ا . هذا و ى (س) هي التي سميناها دالة قضية . سيحدث بوجه عام أن ى (س) صادقة لبعض قيم س وكاذبة لبعضها الآخر . وجميع قيم س التي تصدق عليها ى (س) تكون ما سميناه « الفصل » المعرف بـ ى (س) . على ذلك كل دالة قضية تعرف فصلا . والإحصاء الفعلي لأعضاء الفصل ليس ضروريا لتعريفه . ثم نستطيع بدون الإحصاء أن نعرف تشابه فصلين : يكون فصلان ى ، ف متشابهين عند وجود علاقة واحد بواحد ع بحيث « س هي أحد ى » تستلزم دائما أن « هناك أحد ف له مع س العلاقة ع » و « ص هي أحد ف » تستلزم دائما أن « هناك أحد ى له مع ص العلاقة ع » . وبعد ذلك ع علاقة واحد بواحد إذا كانت س ع ص ، س ع ط يستلزمان دائما معاً تطابق ص مع ط ، « س ع ط ، ص ع ط معاً تستلزمان دائما تطابق س مع ص . وتعرف « س متطابقة مع ص » بأنها تعني : « كل دالة قضية تصدق على س تصدق كذلك على ص » . ونعرف الآن العدد الأصلي لفصل ما ى بأنه فصل جميع الفصول المتشابهة لـ ى . وكل فصل فله عدد أصلي ما دام « ى متشابه لـ ف » دالة قضية لـ ف إذا كان متغيرا . علاوة على ذلك ى نفسه عضو في عدده الأصلي ما دام كل فصل متشابها مع نفسه . ويجب ملاحظة أن التعريف المذكور للعدد الأصلي يقوم على فكرة دوال القضايا ولا يتطلب الإحصاء في أي مكان . وبناء على ذلك ليس ثمة سبب لافتراض وجود أي صعوبة بالنسبة

لأعداد الفصول التي لا يمكن عد حدودها بالطريقة المعتادة الابتدائية . والفصول يمكن أن تقسم إلى نوعين بحسب ما تكون شبيهة بأجزاء صحيحة بذاتها أو لا تكون . ففي الحالة الأولى تسمى لا متناهية ، وفي الحالة الثانية متناهية . ويسمى عدد الفصل المعرف بدالة قضية كاذبة دائما صفرا (٠) . أما ١ فيعرف بأنه عدد فصل مَا ى ، ويكون فيه حد مَا س ينتمي ا ى ، بحيث إن ، ص هو أحد ي وتختلف ص عن س ، كاذبة دائما . فإذا كان ن أي عدد ، عرف ن + ١ بأنه عدد الفصل ي الذي س عضو فيه بحيث أن دالة القضية ، ص هو أحد ى وتختلف ص عن س ، تعرف فصلا عدده ن . فإذا كان ن متناهيا ، كان ن + ١ مختلفا عن ن ، وإلا فلا . بهذه الطريقة إذا بدأنا من ٠ حصلنا على متوالية من أعداد ، ما دام ن يؤدي إلى عدد جديد هو ن + ١ . ومن السهل إثبات أن جميع الأعداد المنتمية للمتوالية التي تبدأ من ١ وتتولد بهذه الطريقة فهي مختلفة . وبعبارة أخرى إذا انتمى ن لهذه المتوالية ، وكان م أحد سوابقها ، فالفصل المكون من ن من الحدود لا يمكن أن يكون له ترابط واحد بواحد مع م من الحدود . والمتوالية المعرَّفة على هذا النحو هي متسلسلة « الأعداد المتناهية » . ولكن لا يوجد أي سبب للظن بأن جميع الأعداد يمكن تحصيلها بهذه الطريقة . حقا يمكن إعطاء برهان صوري على أن عدد الأعداد المتناهية ذاتها لا يمكن أن يكون حدا في متوالية الأعداد المتناهية . والعدد الذي لا ينتمي لهذه المتوالية يسمى « لامتناهيا » . والبرهان على أن ن ، ن + ١ عددان مختلفان يعتمد على هذه الحقيقة وهي أن ٠ ، ١ أو ١ ، ٢ أعداد مختلفة وذلك بواسطة الاستنباط الرياضي ، فإذا لم يكن ن ، ن + ١ حدين في هذه المتوالية لم يصح البرهان . وأكثر من هذا هناك برهان مباشر على العكس . ولكن ما دام البرهان السابق كان معتمدا على الاستنباط الرياضي ، فلا يوجد أي سبب يمنع من إطلاق النظرية على الأعداد اللامتناهية . فالأعداد اللامتناهية لا يمكن التعبير عنها كالأعداد المتناهية بطريقة النظام العشري ، ولكن يمكن تمييزها بالفصول التي تنطبق عليها . وحيث إن الأعداد المتناهية قد عرفت كلها بالمتوالية المذكورة ، فإذا كان فصلٌ مَا ي له حدود ولكنها ليست أي عدد متناه من الحدود فله عندئذ عدد لا متناه وهذه هي النظرية الموجبة لللانهاية .

٣٣٩ — وجود فصول لامتناهية يبلغ من الوضوح حداً يصعب معه إنكارها . ولما كانت قابلة للبرهان الصوري فقد يحسن البرهنة عليها . وهناك برهان بسيط جداً نجده في محاورة بارمنيدس . وهو كما يأتي : إذا سلمنا بوجود العدد ١ ، عندئذ هذا العدد له « وجود » ، وإذن هناك وجود . ولكن ١ والوجود اثنان ، حينئذ هناك عدد ٢ ، وهكذا . من الناحية الصورية لم نبرهن على أن ١ عدد الأعداد ولكننا نبرهن على أن ن هو عدد الأعداد من ١ إلى ن ، وأن هذه الأعداد مأخوذة مع الوجود تكون فصلا له عدد متناه جديد بحيث ن ليس عدد الأعداد المتناهية . إذن ١ ليس عدد الأعداد المتناهية . وإذا كان ن — ١ ليس عدد الأعداد المتناهية فليس ن كذلك أيضاً. حينئذ الأعداد المتناهية محوية كلها بالاستنباط الرياضي في فصل الأشياء التي ليست عدد الأعداد المتناهية . وما دامت علاقة التشابه متمكنة بالنسبة للفصول . فكل فصل له عدد . إذن فصل الأعداد المتناهية له عدد من حيث إنه ليس متناهياً فهو لامتناه . وهناك برهان أفضل من السابق مشتق من هذه الحقيقة وهي : أنه إذا كان ن أي عدد متناه ، فعدد الأعداد من ٠ إلى ن بما فيها ن هو ن + ١ . ويترتب على ذلك أن ن ليس عدد الأعداد . ويمكن البرهنة على ذلك مباشرة بترابط الكل والجزء بقولنا إن عدد القضايا أو التصورات لامتناه [1] . لأنه لكل حد أو تصور فكرة تختلف عما هي فكرة له ، ولكنها أيضاً حد أو تصور . ومن جهة أخرى ليس كل حد أو تصور فكرة . فهناك مناضد . وأفكار عن المناضد ، وهناك أعداد . وأفكار عن الأعداد ، وهكذا . إذن توجد علاقة واحد بواحد بين الحدود والأفكار . ولكن الأفكار إنما هي بعض حدود فقط من جميع الحدود . إذن هناك عدد لامتناه من الحدود والأفكار [2] .

٣٤٠ — يجب الاعتراف بأن احتمال أن يكون للكل والجزء نفس عدد الحدود أمر يصدم بداهة الفطرة السليمة . وحجة أخيل التي ساقها زينون تبين ببراعة أن وجهة النظر المقابلة لها كذلك نتائج شنيعة . لأنه إن لم يمكن أن يترابط الكل والجزء حداً بحد

---

(١) انظر Bolzano Paradoxien des Unendlichen, § 13; Dedekind Was sind und was sollen die Zahlen? N. 66

(٢) ليس من الضروري أن نفترض أن كل [illegible] جميع الحدود [illegible] موجودة [illegible] لم تكون جزءاً من غير [illegible] يكون له نفيه [illegible]

ترتب على ذلك بلا نزاع أنه إذا سارت نقطتان ماديتان في نفس الطريق بحيث تتبع إحداهما الأخرى ، فالنقطة المتخلفة لن تدرك أبداً المتقدمة . فإن أدركتها فلا بد أن يكون عندنا بفرض الترابط الآني للأوضاع تناظر وحيد ومنعكس بين جميع حدود الكل وبين جميع حدود الجزء . وعندئذ تصبح الفطرة السليمة في موقف لا تحسد عليه . إذ علينا أن نختار بين متناقضة paradox زينون ومتناقضة كانتور وليس في نيتي تأييد المغالطة لأنني أعتبر أنها ينبغي أن تتوارى في مواجهة البراهين . ولكنني سأعطي متناقضة كانتور صورة تشبه صورة متناقضة زينون . نحن نعرف أن ترسترام شاندي[1] Tristram Shandy استغرق عامين في كتابة تاريخ أول يومين في حياته ، وأخذ ينتحب قائلاً إنه بهذه السرعة تتجمع عنده المادة بأسرع مما يستطيع أن يبحثها ، وبذلك لن يصل إلى نهاية . وسأذهب إلى أنه لو عاش إلى الأبد دون أن يمل عمله ، إذن حتى إذا كانت حياته قد استمرت مملوءة بالحوادث كما بدأت ما بقي أي جزء من سيرته دون كتابة . هذه المتناقضة paradox التي تترابط كما سأبين تماماً مع متناقضة أخيل يمكن أن تسمى على سبيل التيسير بمتناقضة ترسترام شاندي .

وفي الحالات التي من هذا القبيل لن يكون جهدنا في جعل الحجة صورية فضلاً زائداً . ولذلك سأضع كلا متناقضتي أخيل وترسترام في هيئة منطقية دقيقة .

أ – (١) يوجد لكل وضع من أوضاع السلحفاة وضع واحد لا غير لأخيل ، ولكل وضع لأخيل وضع واحد لا غير للسلحفاة .

(٢) إذن متسلسلة الأوضاع التي يشغلها أخيل لها نفس عدد الحدود مثل متسلسلة الأوضاع التي تشغلها السلحفاة .

(٣) الجزء له حدود أقل من الكل الذي يشتمل على الجزء ولا يكون مساوياً معه .

(٤) إذن متسلسلة الأوضاع التي تشغلها السلحفاة ليست جزءاً صحيحاً من متسلسلة الأوضاع التي يشغلها أخيل .

ب – (١) ترسترام شاندي يكتب في سنة حوادث يوم .

---

(١) قصة مشهورة للقصصي الإنكليزي سترن Sterne كتبها بين ١٧٦٠ – ١٧٦٧ – وترسترام اسم بطل القصة مأخوذ من ترسا جستوس Trismegistus أي الثلاث العظمة [illegible] وتفكير قصصية به . وفي القصة نسمع عن ترسترام قبل مولده أكثر مما نسمع بعد مولده والإطالة على [illegible] . (المترجم)

(٢) متسلسلة الأيام والسنين ليس لها حد أخير .

(٣) حوادث اليوم النونى تكتب فى السنة النونية .

(٤) أى يوم معين فهو اليوم النونى لقيمة مناسبة لـ ن .

(٥) إذن أى يوم معين سيكتب عنه .

(٦) إذن لن يبقى أى جزء من سيرة الحياة غير مكتوب .

(٧) لما كان هناك ترابط واحد بواحد بين أوقات الحوادث وأوقات الكتابة ، وكانت الأولى جزءاً من الثانية ، فالكل والجزء لهما نفس عدد الحدود .

ولنشرع فى صياغة هذين التناقضين بأكثر ما يمكن من التجريد ، فنقول : ليكن ى متسلسلة ملتحمة من أى نوع ، وليكن س متغيراً يمكن أن يأخذ جميع القيم فى ى بعد قيمة معينة سنسميها ٠ ، وليكن د (س) دالة أحادية القيمة لـ س ، و س دالة أحادية القيمة لـ د (س) ، كذلك ليكن جميع قيم د (س) منتمية لـ ى ، عندئذ تجرى الحجج على النحو الآتى :

ا ـ ليكن د (٠) حداً سابقاً على ٠ ، وليكن د (س) تكبر كلما كبرت س ، أى إذا كانت س ب سَ (حيث ب العلاقة المولدة) فليكن د (س) ب د (سَ) . ثم ليكن د (س) تأخذ جميع القيم فى ى المتوسطة بين أى قيمتين من قيم د (س) . عندئذ إذا أعطينا س قيمة ما ا بحيث يكون ٠ ب ا ؛ حصلنا على د (ا) = ا؛ إذن متسلسلة قيم د (س) ستكون جميع الحدود من د (٠) إلى ا ، بينما متسلسلة قيم س ستكون فقط الحدود من ٠ إلى ا التى هى جزء من تلك الحدود من د (٠) إلى ا . وإذن فأن تفترض أن د (ا) = ا هو أن تفترض علاقة واحد بواحد وحد بحد للكل والجزء ، وهذا ما يقول زينون والفطرة السليمة باستحالته .

ب ـ ليكن د (س) دالة تكون ٠ عند ما تكون س ٠ ، وتكبر بانتظام كلما كبرت س ، من حيث إن متسلسلتنا من المتسلسلات التى يوجد فيها قياس . عندئذ إذا أخذت س جميع القيم بعد ٠ ، فكذلك تأخذ د (س) ، وإذا أخذت د (س) جميع مثل تلك القيم ، فكذلك تأخذ س . إذن فصل قيم إحداهما مطابق لفصل قيم الأخرى . ولكن إذا كان فى أى وقت قيمة س أكبر من قيمة د (س) ، ما دامت د (س) تكبر بسرعة منتظمة ، إذن س ستكون دائماً أكبر من د (س) .

وعلى ذلك لأى قيمة معينة ا من يكون فصل قيم د (س) من ، إلى د (س) جزءاً صحيحاً من قيم ص من ، إلى ص ، ومن ثم نستطيع أن نستنتج أن جميع قيم د (س) كانت جزءاً صحيحاً من جميع قيم ص ، وقد رأينا أن هذا باطل .

هاتان المتناقضتان مترابطتان ، وكلاهما بالإشارة إلى القطع يمكن تقريرها بصيغة النهايات . حجة أخيل تبرهن على أن متغيرين فى متسلسلة متصلة يبلغان التساوى من نفس الجهة ، فلا يمكن أبداً أن يكون لهما نهاية مشتركة . وتبرهن حجة ترسترام أن المتغيرين اللذين يبدآن من حد مشترك ويسيران فى نفس الاتجاه ولكن يتباعدان أكثر فأكثر ، قد يحددان مع ذلك الفصل النهائى . (الذى ليس من الضرورى أن يكون قطعة لأن القطع عُرِّفت بأن لها حدوداً وراء نفسها) . حجة أخيل تفترض أن الكل والجزء لا يمكن أن يتشابها ، وتستنبط من ذلك متناقضة . والحجة الأخرى تبدأ من قول متهافت وتستنتج من ذلك أن الكل والجزء قد يتشابهان . ولا بد لنا من الاعتراف أن هذه الحالة فى نظر الفطرة السليمة من أسوأ الأمور .

٣٤١ – لا يوجد أدنى شك أى الطرق هو الصحيح ، إذ ينبغى رفض حجة أخيل بسبب تناقضها مباشرة مع الحساب ، وحجة ترسترام لا بد من قبولها ما دامت لا تتطلب البديهية القائلة بأن الكل لا يمكن أن يكون متشابهاً مع الجزء . وهذه البديهية كما رأينا جوهرية فى برهان أخيل ، وهى بلا ريب بديهية تستسيغها الفطرة السليمة . ولكن لا دليل على البديهية سوى الوضوح الذاتى المزعوم ، والتسليم بها يفضى إلى متناقضات دقيقة تماماً . وليست البديهية عديمة الجدوى فقط ، ولكنها هادمة إيجابياً فى الحساب ، ولا شىء يقف فى سبيل رفضها سوى التحيز السابق . ومن أهم مزايا البراهين أنها تشيع ضرباً من الشك بالنسبة للنتيجة المبرهن عليها . فلم نكد نرى أن تشابه الكل والجزء يمكن البرهنة على استحالته لكل كلٍّ متناه[1] ، حتى لم يصبح من المستهجن أن تفترض ذلك بالنسبة للكلات اللامتناهية ، أما حيث نعجز عن البرهنة على الاستحالة ، فلم تكن هناك فى الواقع مثل هذه الاستحالة . الواقع بالنسبة للأعداد التى نتعامل بها فى حياتنا اليومية – فى

---

(١) المؤلف معرفاً هنا بالاستعانة لمريرضى تجنب التكرار

الهندسة ، أو الفلك ، أو الحسابات ، حتى حسابات روكفلر أو وزير الخزانة ، فإن تشابه الكل والجزء مستحيل . وعلى ذلك كان افتراض استحالته دائماً سهل التفسير . ولكن الافتراض يعتمد على أساس لا ينفصل بتاتاً عن ذلك الذي كان يعتمد عليه ملاحظة أواسط أمريقيا من أن جميع الناس زنوج .

٣٤٢ – ولبيان الفرق بين الكلات المتناهية واللامتناهية قد يحسن أن نشير إلى أن الكل والجزء حدان يقبلان تعريفين حيث يكون الكل متناهياً ، ولا يقبلان إلا أحد هذين التعريفين فقط على الأقل عملياً حيث يكون الكل لامتناهياً [١] . والكل المتناهي قد يؤخذ جملة collectively ، كهذه الأفراد وتلك ، مثلا ا ، ب ، حـ ، د ، هـ . وقد نحصل على جزء من هذا الكل بعدِّ بعض لا كل الحدود المكونة للكل . وبهذه الطريقة يكون الفرد المفرد جزءاً من الكل . ولا حاجة إلى أخذ الكل أو الأجزاء كفصلين ؛ بل كل منهما قد يُعرَّف بالماصدق ، أي بعد الأفراد . ومن جهة أخرى الكل والأجزاء قد يعرَّف كلاهما بالمفهوم ، أي بفصل التصورات . فنحن نعرف بغير عد أن الإنجليز جزء من الأوربيين ، لأن كل إنجليزي فهو أوربي ؛ ولكن ليس العكس . ولو أن هذا الأمر يمكن تقريره بالعدِّ ولكن لا ضرورة لتقريره على هذا النحو . فإذا بحثنا في الكلات اللامتناهية يختفي هذا التعريف المزدوج ، ولا يبقى فقط إلا التعريف بالمفهوم . والكل والأجزاء يجب أن يكون كلاهما فصولا ، ويجرى تعريف الكل والجزء بواسطة فكرتي المتغير واللزوم المنطقي . فإذا كان ا فصل تصور ، كان أحد أفراد ا حداً له مع ا تلك العلاقة المتخصصة التي نسميها فصل العلاقة . والآن إذا كان ب فصلا آخر بحيث إنه لجميع قيم س ، س هو أحد ا ، تستلزم ، س هو أحد ب ، عندئذ ما صدق (أي المتغير س) يقال إنه ، جزء ، من ما صدق ب [٢] . فهنا لا حاجة إلى عد الأفراد ، ولم يتعدَّ لعلاقة الكل والجزء ذلك المعنى البسيط الذي كان له حيث يتصل الأمر بالأجزاء المتناهية . فأن نقول الآن إن ا ، ب متشابهان كأننا نقول بوجود علاقة واحد بواحد ما ع تحقق الشروط الآتية : إذا كان س أحد ا ، فهناك حد ص في الفصل ب بحيث س ع ص . فإذا كان ص أحد ب ، فهناك حد س

(١) انظر الفقرة ٣٢ .

(٢) انظر Peano, Rivista di Matematica VII et Formulaire, Vol. II Part I.

في الفصل ا بحيث س ا ع ص . ومع أن ا جزء من ب . فمثل هذه الحالة من الأمور إنما يبرهن عليها بالعد . وليس ثمة سبب لافتراض أن العد ممكن . وتعريف الكل والجزء بغير عد هو مفتاح هذه المشكلة الغامضة بأسرها . والتعريف المذكور سابقاً والذي يرجع إلى بيانو هو التعريف المنطقي طبيعياً وضرورة على الكلاسات اللامتناهية . مثال ذلك أن الأعداد الأولية جزء صحيح من الأعداد الصحيحة ، ولكن لا يمكن إثبات ذلك بالعد ، بل نستنتجه من الآتي : إذا كان س عدداً أولياً ، كان س عدداً ، و إذا كان س عدداً فلا يترتب على ذلك أن س عدد أولي . أما أن فصل الأعداد الأولية يجب أن يكون مشابهاً لفصل الأعداد إنما يلوح مستحيلاً بسبب أننا نتخيل أن الكل والجزء يعرفان بالعد . حتى إذا تحررنا من هذه الفكرة تلاشى التناقض المفروض .

٣٤٣ — من المهم جداً أن نتحقق بالنسبة إلى ω أو α أنه ولا واحد منهما له عدد يسبقه مباشرة . وهذه الخاصية يشتركان فيها مع كافة النهايات . لأن نهاية المتسلسلة لا تسبق أبداً مباشرة بأي حد من المتسلسلة التي هي نهاية لها . ولكن ω هو بمعنى ما متقدم منطقياً على النهايات الأخرى . لأن الأعداد الترتيبية المتناهية مأخوذة مع ω معاً تقدم الصنف الصوري لمتوالية مأخوذة مع نهايتها . فإذا غاب عنا أن ω ليس له سابق مباشر برزت جميع ضروب المتناقضات . ولنفرض ν العدد الأخير قبل ω ، عندئذ ν عدد متناه ، وعدد الأعداد المتناهية هو $\nu + ١$. الواقع قولنا بأن ω ليس له سابق إنما هو مجرد قولنا إن الأعداد المتناهية ليس لها حد أخير . ومع أن ω يكون مسبوقاً بجميع الأعداد المتناهية ، فإنه ليس مسبوقاً مباشرة بأي واحد منها : فلا عدد بعد ω . وأعداد كانتور المتصاعدة لها خاصية أنها مع وجود عدد هو التالي بعد عدد معين ، فلا يوجد دائماً عدد هو التالي قبل . وهكذا يلوح أنه ثمة فجوات في المتسلسلة . خذ مثلاً المتسلسلة ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ν ، . . . التي تكون لامتناهية وليس لها حد أخير . ثم متسلسلة أخرى ω ، $\omega + ١$ ، $\omega + ٢$ ، . . . $\omega + \nu$ ، . . . التي تساوي الأولى في أنها لامتناهية وليس لها حد أخير . هذه الثانية تأتي تماماً بعد المتسلسلة الأولى ، ولو أنه لا حد من الأولى يعقبه ω مباشرة . هذه الحالة من الأمور يمكن أن نوازيها بمتسلسلة ابتدائية جداً . مثل المتسلسلة التي حدودها العامة هي $١ - \frac{١}{\nu}$

٣ — ن حيث ن قد يكون أي عدد صحيح متناه . والمتسلسلة الثانية تأتي كلها بعد الأولى ، ولها حد أول معين هو ١ ، ولكن لا يوجد أي حد في المتسلسلة الأولى يسبق مباشرة ١ . كل ما هو لازم لكي تأتي المتسلسلة الثانية بعد الأولى ، هو أن يكون هناك متسلسلة ما تحوي كليهما . فإذا أطلقنا اسم « الجزء الترتيبي » لمتسلسلة على أي متسلسلة يمكن الحصول عليها بحذف بعض حدود متسلسلتنا دون تغيير ترتيب الحدود الباقية ، عندئذ تكون الترتيبات المتناهية والمتصاعدة جميعاً متسلسلة واحدة علاقتها المولدة هي علاقة الكل والجزء الترتيبي بين المتسلسلة التي تنطبق عليها الترتيبات المتعددة . وإذا كان ن أي ترتيبي متناه كانت المتسلسلات من الصنف ن أجزاء ترتيبية من متواليات ، وبالمثل كل متسلسلة من الصنف ن + ١ تحوي متوالية كجزء ترتيبي . والعلاقة « جزء ترتيبي » ordinal part متعدية ولا متماثلة ، وهكذا تنتمي الترتيبات المتناهية والمتصاعدة جميعاً لمتسلسلة واحدة . ووجود ن (بالمعنى الرياضي للوجود) ليس عرضة لسؤال ، ما دام ن هو صنف الترتيب المقدم بالأعداد الطبيعية ذاتها . وإنكار ن معناه إثبات وجود عدد متناه أخير — وهي نظرة تؤدي كما رأينا فوراً إلى متناقضات لا شك فيها . وإذا سلمنا بذلك ، كانت ن + ١ هي صنف متسلسلة الترتيبات المتضمنة ، أي المتسلسلة التي حدودها هي جميعاً متسلسلة الأعداد الصحيحة من ١ إلى أي عدد متناه مأخوذ مع كل متسلسلة الأعداد الصحيحة ، ومن ثم يسهل نشوء جميع السلم اللانهائي للأعداد المتصاعدة .

٣٤٤ — الاعتراضات العادية على الأعداد اللامتناهية ، والفصول ، والمتسلسلات ، والفكرة القائلة بأن اللامتناهي من حيث هو كذلك متناقض بذاته ، يمكن بذلك أن تستبعد على أنها لا أساس لها . ومع ذلك تبقى صعوبة عسيرة جداً مرتبطة بالتناقض الذي ناقشناه في الباب العاشر . هذه الصعوبة لا تتعلق باللامتناهي من حيث هو كذلك ، بل فقط ببعض فصول لامتناهية كبيرة جداً . باختصار القول يمكن تقرير الصعوبة على النحو الآتي . أعطى كانتور برهاناً [١] على أنه لا يمكن وجود عدد أصلي هو الأكبر . فإذا فحصنا هذا البرهان رأيناه يقرر أنه إذا كان ى فصلاً ، كان عدد الفصول المحتواة في ى أكبر من عدد حدود ى ، أو

---

(١) لقد أعطى كانتور برهانين . ويكفي منهما أن نتناول أبسطهما .

(وهو ما يكافئه) إذا كان ا أي عدد ، كان ٢ ا أكبر من ا . ولكن هناك بعض الفصول من السهل أن نعطي بشأنها برهاناً ظاهر الصحة على أن فيها أكثر ما يمكن من الحدود . وهذه هي مثل فصل جميع الحدود ، أو فصل جميع الفصول ، أو فصل جميع القضايا . وهكذا يلوح كما لو أن برهان كانتور كان ينبغي أن يشتمل على افتراض ما لم يتحقق في حالة مثل هذه الفصول . ولكن عند ما نطبق استدلال برهانه على الحالات المذكورة ، نرى أننا نصطدم بتناقضات معينة أحدها ما ناقشناه في الباب العاشر مما يعد مثلا عنها [١] . وتنشأ الصعوبة حينما نحاول البحث في فصل جميع الأشياء بالإطلاق ، أو بأي فصل يساويه في كثرة العدد ولكن بالنسبة لصعوبة مثل هذه الوجهة من النظر ، قد نميل إلى القول بأن تصور جملة الأشياء ، أو كل عالم الأشياء والموجودات ، أمر من بعض الوجوه غير مشروع ، ومخالف بالذات للمنطق . ولكن ليس من المرغوب فيه اتخاذ مثل هذا الإجراء اليائس ما دام هناك أمل في إيجاد حل أكثر تواضعاً .

ولنبدأ بقولنا - إننا قد نلاحظ أن فصل الأعداد ليس — كما عسى أن يفترض — أحد الفصول التي تقع فيها الصعوبات ، إذ بين الأعداد المتناهية ، إذا كان ن عدد الأعداد ، وجب استنتاج أن ن — ١ أكبر الأعداد ، وإذن لا يوجد عدد ن على الإطلاق . ولكن هذه خاصية للأعداد المتناهية . وعدد الأعداد إلى ا ، ومشتملا عليه هو ا ، ولكن هذا أيضاً هو عدد الأعداد إلى ا م ومشتملا عليه ، حيث م أي عدد ترتيبي أو أي ترتيبي متناه ينطبق على متسلسلة معدودة محكمة الترتيب . وعلى ذلك عدد الأعداد إلى ا ومشتملا عليه ، هو عادة أصغر من ، حيث ا عدد لا متناه . وليس ثمة سبب لافتراض أن عدد جميع الأعداد هو أكبر عدد . فعدد الأعداد ربما كان أصغر من أكبر عدد ، ولا ينشأ أي تناقض من هذه الحقيقة (إن كانت هذه حقيقة) وهي أن عدد الأفراد أكبر من عدد الأعداد .

ولكن مع أن فصل الأعداد لا يسبب أي صعوبة فهناك فصول أخرى من الصعب جداً البحث فيها . ولنبدأ أولا بفحص براهين كانتور من أنه لا يوجد

(١) [illegible] في الملحق ب .

عدد أصلي هو الأكبر . ثم نناقش الحالات التي تنشأ فيها المتناقضات .

٣٤٥ – في أول براهين كانتور [١] ، نعتمد الحجة على الحقيقة المفروضة من أن هناك تناظر واحد بواحد بين الترتيبات والأصليات [٢] . فقد رأينا عند النظر في عدد أصلي من متسلسلة من الصنف الذي يمثله أي عدد ترتيبي ، أن عدداً لامتناهياً من الترتيبات يناظر عدداً أصلياً واحداً . مثال ذلك جميع الترتيبات من الفصل الثاني التي تكون مجموعة غير محدودة ، تناظر العدد الأصلي المفرد ا . ولكن هناك طريقة أخرى للترابط فيها ترتيبي واحد فقط يناظر كل أصلي . هذه الطريقة تنتج من اعتبار متسلسلة الأصليات نفسها . ففي هذه المتسلسلة ٠ ، ١ ، ... ن ... ١ يناظر ن + ١ ، وهكذا . فهناك دائماً ترتيبي واحد لا غير يصف صنف المتسلسلة التي تقدمها الأصليات من ٠ إلى أي واحد منها . ويلوح أننا نفترض ضمناً وجود أصلي لكل ترتيبي ، وأنه لا فصل يمكن أن يكون له هذا العدد الكبير من الحدود ، بحيث ولا متسلسلة محكمة الترتيب يمكن أن يكون لها عدد أكبر من الحدود . أما أنا فلا أرى أي أسباب لتأييد أي الفرضين ، وأرى أسباباً معينة لرفض الثاني ، لأن كل حد في متسلسلة يجب أن يكون فرداً ، ويجب أن يكون فرداً مختلفاً (وهي نقطة لا يلتفت إليها غالباً) عن كل فرد آخر من المتسلسلة ، يجب أن يكون مختلفاً ، لأنه لا توجد أي أمثلة لفرد . فكل فرد فريد بالإطلاق ، وبطبيعة الحال واحد فقط . ولكن حدان في متسلسلة فهما اثنان ؛ فليسا إذن فرداً واحداً بالذات . هذه النقطة الخاصة تكون غامضة لأننا كقاعدة لا نصف وصفاً كاملاً حدود متسلسلتنا . فحين نقول : لتكن متسلسلة ا ، ب ، حـ ، ا ، ب ، د ، هـ ، حيث تتكرر حدود على فترات – مثل المتسلسلة التي تقدمها الأرقام في النظام العشري – ننسى النظرية القائلة بأنه حيث يوجد تكرار إنما يمكن أن

(١) Mannichfaltigkeitslehre, p. 41.

(٢) [illegible] ص ٣٠٢ .

نحصل على متسلسلتنا بالترابط ، ومعنى ذلك أن الحدود ليس لها بذاتها ترتيب ، ولكن لها علاقة واحد بكثير (لا واحد بواحد) مع الحدود التي لها ترتيب [١] . وعلى ذلك إذا رغبنا في الحصول على متسلسلة حقيقية genuine فيجب إما أن نرجع إلى المتسلسلة التي تترابط معها حدودنا . وإما أن نكون الحدود التركيبة المؤلفة من تلك الحدود في المتسلسلة الأصلية ومن تلك المتسلسلة المترابطة في أزواج . ولكن لا يوجد تكرار في أي من هاتين المتسلسلتين . وعلى ذلك كل عدد ترتيبي يجب أن يناظر متسلسلة من الأفراد تختلف كل واحدة منها عن الأخرى . وقد يشك هل تكون جميع الأفراد متسلسلة أصلا . أما أنا فلا أستطيع تبين أي علاقة متعدية لا متماثلة تقوم بين كل زوج من الحدود . حقاً يعتبر كانتور أن كل مجموعة معينة يمكن أن تجعل محكمة الترتيب . على أن ذلك قانون من قوانين الفكر . ولكن لا أرى أساساً لهذا الرأى . ومع ذلك فإذا أجزنا هذه الوجهة من النظر سيكون للترتيبات نهاية عليا maximum معينة تماماً . وهي ذلك الترتيبي الذي يمثل صنف المتسلسلة المكونة من جميع الحدود بدون استثناء [٢] . فلو أن مجموعة كل الحدود لم تكن تكون متسلسلة . فمن المستحيل إثبات ضرورة وجود ترتيبي هو الأعلى maximum ordinal الذي توجد على كل حال أسباب لإنكاره [٣] . ولكن في هذه الحالة ربما كان له الحق أن نشك هل يوجد من الترتيبات بمقدار ما يوجد من الأصليات . بالطبع إذا كانت جميع الأصليات تكون متسلسلة محكمة الترتيب ، فيجب أن يوجد ترتيبي لكل أصلي . ولكن مع أن كانتور يقول بأن عنده برهاناً على أنه إذا اختلف عددان أصليان ، فأحدهما لا بد أن يكون هو الأكبر (Math. Annalen XLVI, § 2) فلا أستطيع إقناع نفسي أنه لم يفعل أكثر من أنه أثبت وجود متسلسلة حدودها أصليات ، أي وجد منها أكبر أو أصغر من أي واحد آخر . أما أن جميع الأصليات موجودة في هذه المتسلسلة فلست أرى سبباً للاعتقاد في ذلك . فربما وجد

---

(١) انظر الباب الخامس والثلاثين .

(٢) أما فيما يختص بالترتيبي الأعلى انظر Burali-Forti, "Una questione sui numeri transfiniti", Rendiconti del circolo matematico di Palermo 1897. وانظر كذلك مقالتي في مجلة R. d. M., Vol. VIII, p. 43 note

(٣) انظر الباب الثامن والثلاثين بند ٣٠١

فصلان ، بحيث لا يمكن إجراء ترابط بين أحدهما وبين جزء من الآخر . وفي هذه الحالة لن يكون العدد الأصلي في أحد الفصلين مساوياً للعدد في الآخر ولا أكبر ولا أصغر منه . ولو كانت جميع الحدود محتمية بسلسلة مفردة محكمة الترتيب لكان ذلك مستحيلا . فإن لم تكن فلا أستطيع أن أجد أى طريقة لبيان أن مثل هذه الحالة لا يمكن أن تنشأ ، وبذلك ينوء أن البرهان الأول ، على أنه لا يوجد أصلى لا يمكن أن يزاد عليه ، قد انهار .

٣٤٦ ــ البرهان الثانى من البراهين المشار إليها سابقاً [1] مختلف تمام الاختلاف وأكثر تحديداً . والبرهان فى حد ذاته طريف وهام ومنطوى مجملا عنه . تشتمل المقالة التى ظهر فيها هذا البرهان على نقاط ثلاث (١) برهان بسيط على وجود قوى أعلى من القوة الأولى (٢) الإشارة إلى أن هذه الطريقة فى البرهان يمكن أن تنطبق على أى قوة (٣) تطبيق الطريقة لإثبات وجود قوى أعلى من قوة المتواصل . ولنبدأ بفحص أول هذه النقاط ، ثم ننظر أهذه الطريقة عامة حقاً .

يقول كانتور : ليكن م ، و خاصتين متباعدتين فيما بينهما ، واعتبر مجموعة م من عناصر هـ حيث كل عنصر فى هـ مجموعة معدودة س١ ، س٢ ، ..... ، سن ، وكل من إما أنه أحد م أو أحد و (الخاصتان م ، و يمكن اعتبارهما على التوالى أكبر وأصغر من حد ما ثابت . هكذا يمكن أن تكون السينات أعداداً منطقة يكون كل منها أحد م عند ما تكون أكبر من ١ ، وأحد و عند ما تكون أصغر من ١ . وهذه الملاحظات لا على ها منطقياً . ولكنها تيسر متابعة الحجة) . والمجموعة م تتكون من جميع العناصر الممكنة فى هـ من الوصف المتقدم الذكر . عندئذ م غير معدودة ، أى من قوة أعلى من الأولى [2] ، ولنأخذ أى مجموعة معدودة من العناصر معرفة كما يأتى

$$\text{هـ}_{١} = (\text{أ}_{١١} ، \text{أ}_{١٢} ، \ldots\ldots \text{أ}_{١ن} ، \ldots\ldots)$$
$$\text{هـ}_{٢} = (\text{أ}_{٢١} ، \text{أ}_{٢٢} ، \ldots\ldots \text{أ}_{٢ن} ، \ldots\ldots)$$
$$\text{هـ}_{ن} = (\text{أ}_{ن١} ، \text{أ}_{ن٢} ، \ldots\ldots \text{أ}_{نن} ، \ldots\ldots)$$

(١) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, I (1892) p. 77

(٢) نظرية مفردة لعدد الأصلى : القوة الأولى هى قوة الأعداد الصحيحة المتناهية .

حيث الألفات كل منها أحد م أو أحد و بطريقة معينة ما (مثال ذلك أن الحدود الأولى التي عددها ن ف هن . قد تكون ميمات والباقي جميعاً واوات . أو قد يمكن اقتراح أي قانون آخر يضمن أن تكون الفاءات في متسلسلة مختلفة جميعاً) عندئذ مهما تكن طريقة اختيار متسلسلة الفاءات ، نستطيع دائماً أن نجد حداً هـ ينتمي للمجموعة م ولكن لا ينتمي إلى متسلسلات الفاءات المعدودة . وليكن هـ المتسلسلة (س١ ، س٢ ، .... سن ، ...) حيث لكل ن تكون سن مختلفة عن فن ن - أي إذا كانت فن ن أحد م كانت سن أحد و ، والعكس بالعكس . عندئذ كل واحدة من متسلسلاتنا المعدودة من الفاءات تشتمل على الأقل على حد واحد ليس متطابقاً مع الحد المناظر في هـ . وعلى ذلك هـ ، ليس أي واحد من حدود متسلسلتنا المعدودة من الفاءات . إذن لا متسلسلة من هذا النوع يمكن أن تحوي جميع الفاءات . وعلى ذلك الفاءات غير معدودة ، أي م لها قوة أعلى من القوة الأولى .

ولا حاجة بنا إلى التوقف لفحص البرهان على أن هناك قوة أعلى من قوة المتواصل مما يسهل الحصول عليه من البرهان السابق الذكر . وربما شرعنا تواً في النظر في البرهان العام وهو : إذا عُلمت أي مجموعة أياً كانت فهناك مجموعة من قوة أعلى . هذا البرهان يبلغ من البساطة مبلغ برهان الحالة الخاصة ، ويجري كالآتي : ليكن ى أي فصل ، واعتبر اج فصل علاقات بحيث أنه إذا كانت ع علاقة من هذا الفصل فكل حد من الفصل ى له العلاقة ع إما مع ٠ وإما مع ١ (أي زوج آخر من الحدود يصلح مثل ٠ ، ١) . إذن الفصل اج له قوة أعلى من الفصل ى . ولكي نثبت ذلك فلنلاحظ قبل كل شيء أن اج ليس له بكل تأكيد قوة دنيا ، لأنه إذا كان س أي ى ، ستكون هناك علاقة ع من الفصل اج بحيث أن كل ى ما عدا س له العلاقة ع مع ٠ ، ولكن س له هذه العلاقة مع ١ . والعلاقات التي هي من هذا النوع تكوّن لقيم س المتعددة فصلاً له ترابط واحد بواحد مع حدود ى ، وعوياً في الفصل اج . إذن اج له على الأقل نفس القوة مثل ى . وللبرهنة على أن اج له قوة أكبر اعتبر أي فصل محوى في اج ، وله ترابط واحد بواحد مع ى . عندئذ أي علاقة من هذا الفصل قد تسمى عس ، حيث س بعض ى – والرمز اللاحق س

يدل على ترابط مع س . ولنشرع الآن في تعريف العلاقة ع بالشروط التالية : لكل حد س من ى له مع س علاقة ع مع . لتكن س تأخذ العلاقة ع مع ا ولكل حد س من ى له مع س علاقة ع مع ا ، لتكن س تأخذ العلاقة ع مع . إذن ع تكون معرفة بجميع حدود ى : وهي علاقة من الفصل اع . ولكنها ليست أي واحدة من العلاقات ع . وعلى ذلك مهما يكن الفصل الذى نأخذه والمحوى في اع ومن نفس قوة ى . فهناك دائماً حد في اع لا ينتمي هذا الفصل . وإذن اع له قوة أعلى من ى .

٢٤٧ — ولنبدأ بتبسيط هذه الحجة بعض الشيء بحذف ذكر ، ا ، والعلاقات معهما . تعرف كل علاقة من علاقات الفصل اع عندما نعرف أي حدود ى لها هذه العلاقة مع . وبعبارة أخرى تعرف بواسطة فصل محوى في ى (بما في ذلك الفصل الصفرى ى ذاتها) . وهكذا هناك علاقة واحدة من الفصل اع لكل فصل محوى في ى ، وعدد اع هو نفس العدد كالفصول المحوية في ى . وعلى ذلك إذا كان لا أي فصل كان فحاصل الضرب المنطقي لا ى عبارة عن فصل محوى في ى . وعدد اع هو عدد لاى حيث لا متغير قد يكون أي فصل . وبذلك ترد الحجة إلى ما يأتي : أن عدد الفصول المحوية في أي فصل تزيد على عدد الحدود التي تنتمي إلى الفصل [1] .

وصورة أخرى من نفس الحجة تجري كما يأتي : خذ أي علاقة ع لها الخاصتان (١) أن ميدانها الذى نسبه يساوي لعكس ميدانها . (٢) أنه لا حدين من الميدان لهما بالضبط نفس المجموعة من المتعلقات . ثم بواسطة ع أي حد من ع فهو الترابط مع فصل محوى في ع هو فصل المتعلقات التي يكون هذا الحد المذكور متعلقاً به . وهذا الترابط هو ترابط واحد بواحد . وعلينا أن نبين أنه يوجد على الأقل فصل واحد محوى في ع ومحذوف في هذا الترابط . والفصل المحذوف هو الفصل و الذى يتكون من جميع حدود الميدان . وهي الحدود التي ليست لها العلاقة ع مع نفسها . بعبارة أخرى الفصل و الذى هو ميدان حاصل الضرب المنطقي

---

(١) عدد الفصول المحوية في فصل ... أعضاء ... هو ... ؛ وبهذه تبين الحجة أن ... دائماً أكبر من ... .

ا ع والتعدد ، لأنه إذا كان ص أي حد من الميدان وبناء على ذلك من عكس الميدان ، كان ص ينتمي إ و إذا لم يكن ينتمي للفصل المرتبط مع ص ، ولا ينتمي إ و في الحالة المقابلة . وإذن و ليس نفس الفصل كالفصل المرتبط مع ص ، وهذا ينطبق على أي حد ص نختاره . على ذلك الفصل و محذوف بالضرورة في الترابط .

٣٤٨ - ينبغي الاعتراف بأن الحجة السابقة يلوح أنها لا تشتمل على افتراض موضع نزاع . ومع ذلك هناك بعض الأحوال التي تظهر فيها النتيجة واضحة البطلان . ولنبدأ بفصل جميع الحدود . فإذا سلمنا — كما عملنا في بند ٤٧ — بأن كل مكون في كل قضية حد ، لم تكن الفصول سوى بعض الحدود . وبالعكس ما دام يوجد لكل حد فصل يتكون من ذلك الحد فقط فهناك ترابط واحد بواحد بين جميع الحدود وبين بعض الفصول . إذن يجب أن يكون عدد الفصول هو نفس عدد الحدود [1] . هذه الحالة تلتقي في توافق مع مذهب الأصناف [2] ، وتكون بذلك شبيهة بالضبط لحالة الفصول وفصول الفصول . ولكن إذا سمحنا بفكرة جميع الأشياء [3] من كل نوع ، أصبح من الواضح أن فصول الأشياء إنما يجب أن تكون بعضاً فقط من الأشياء . على حين أن حجة كانتور تبين وجود فصول أكثر من الأشياء . أو خذ فصل القضايا . فكل شيء يمكن أن يقع في قضية ما ، ويبدو مما لا ريب فيه أن هناك على الأقل من القضايا بعدد ما يوجد من الأشياء . لأنه إذا كان ي فصلا ثابتاً ، كانت « س أحد ي » قضية مختلفة لكل قيمة مختلفة من س .

---

(١) يبدو هذا من نظرية شرودر وبرنشتين التي بمقتضاها إذا كانت ... شبيها بجزء من ... وكان ... شبيها بجزء من ... وجب أن تكون ... متشابهين . انظر Borel, Leçons sur la Théorie des Fonctions, Paris, 1898, p. 102.

(٢) انظر ذيل ب فيما بعد .

(٣) ... الجزء الأول من هذا الكتاب ... لفظة ... objets ... هذا المعنى في الجزء الأول ... لفظة ... والفلاسفة ... من حقه أن يكون ... في ... من ... عن ...

واستعمال لفظة ... objets ... terms ... وكذلك بعض الأحوال ... mass ... كان لفظة ... يمكن أن ... والأمر يتعلق ... انظر بند ٤٧ .

وإذا سلمنا حسب مذهب الأصناف أنه إذا كان س له مع ى المعلوم مدى مقيد بأن " وجب أن نبق « س هي أحد ى » ذات دلالة . فليس علينا إلا أن نغير ى تغيراً مناسباً للحصول على قضايا من هذا النوع لكل س ممكنة . وبذلك يجب أن يكون عدد القضايا على الأقل كبيراً كعدد الأشياء . ولكن فصول القضايا إنما هي بعض الأشياء فقط . ومع ذلك فحجة كانتور تبين أن هناك من الأشياء أكثر من القضايا . ثم نستطيع بسهولة إثبات وجود دوال قضايا أكثر من الأشياء . ولنفرض وقوع ترابط بين جميع الأشياء وبعض دوال القضايا . ولتكن ﻫ س المترابطة مع س . إذن « لا — ﻫ س (س) » . أي أن « ﻫ س لا تصح على س » هي دالة قضية غير محوية في الترابط . لأن س تكون صادقة أو كاذبة بحسب ما تكون ﻫ س صحيحة أو كاذبة على س . وإذن فهي مختلفة عن ﻫ س لكل قيمة من س . ولكن هذه الحالة ربما تفسرها من بعض الوجوه مذهب الأصناف .

٣٤٩ — من المفيد أن نفحص بالتفصيل في تطبيق حجة كانتور على مثل هذه الحالات بواسطة ترابط محاولة بالفعل . ففي حالة الحدود والفصول مثلاً ، إذا لم يكن س فصلاً فلنجعله يترابط مع ط س ، أي الفصل الذي عضوه الوحيد س ، أما إذا كان س فصلاً ، فلنجعله يترابط مع نفسه . (ليس هذا الترابط ترابط واحد بواحد بل كثير بواحد ، لأن س ، ط س كلاهما مترابطان مع ط س ، ولكن هذا يعين على توضيح النقطة المذكورة) . ثم الفصل الذي يجب حسب حجة كانتور حذفه من الترابط هو الفصل و ، وهو أحد تلك الفصول التي ليست أعضاء نفسها ، ومع ذلك فهذا الفصل لأنه فصل فيجب أن يترابط مع نفسه . غير أن و فصل — كما رأينا في الباب العاشر — متناقض مع نفسه self contradictory أي أنه عضو مع نفسه وليس عضواً مع نفسه في آن واحد . ويمكن أن يحل التناقض في هذه الحالة بمذهب الأصناف ، ولكن حالة القضايا أكثر صعوبة . وفي هذه الحالة ولنرابط كل فصل من القضايا بالقضية التي هي حاصل ضربها المنطقي ؛ وبهذا السبيل يبدو أننا نحصل على علاقة واحد بواحد لجميع فصول القضايا مع بعض القضايا . ولكن بتطبيق حجة كانتور نجد أننا قد حذفنا الفصل و من تلك القضايا التي هي حواصل ضرب منطقي . ولكنها ليست أعضاء في فصول القضايا التي هي

حواصل ضربها المطلق . وهذا الفصل حسب تعريفنا للرابط يجب أن يكون مترابطاً مع حاصل ضربه المطلق نفسه . إلا أننا عند فحص هذا الحاصل المطلق نجد أنه على السواء عضو وليس عضواً في الفصل والذى هو حاصل ضربه المطلق .

وبذلك نرى أن تطبيق حجة كانتور على الحالات المشكوك فيها يفضي إلى متناقضات ، ولو أنى عجزت عن إيجاد أى نقطة تبدو فيها الحجة باطلة . والحل الوحيد الذى أقترحه هو التسليم بالنتيجة القائلة بعدم وجود عدد هو الأكبر ويذهب الأصناف ، وعدم التسليم بوجود أى قضايا صوادق عن جميع الأشياء أو جميع القضايا . ومع ذلك فالأمر الأخير يبدو واضح البطلان ، ما دامت جميع القضايا على أى حال فهى صادقة أو كاذبة حتى إذا لم يكن لها أى خواص أخرى مشتركة . وبهذا الوضع غير المرضى أنفض المشكلة من يدى تاركاً إياها لفطنة القارئ .

٣٥٠ ـ تجمل الآن مناقشات هذا الجزء فنقول : رأينا أولاً أن اللامتطقات تعرف بأنها تلك القطع من المنطقات التى ليس لها نهاية . وبهذا الطريق يستطيع التحليل الاستغناء عن أى بديهية خاصة عن الاتصال . ورأينا أنه من الممكن بطريقة ترتيبية بحتة تعريف نوع الاتصال الذى ينتمى للأعداد الحقيقية . وأن الاتصال معرفاً على هذا النحو ليس متناقضاً مع نفسه . ورأينا أن حساب التفاضل والتكامل فى غير حاجة إلى اللانهائى الصغر ، وأنه مع أن بعض صور اللانهائى الصغر مقبولة ، إلا أن الصورة الأكثر شيوعاً وهى القطع اللانهائية الصغر فى متسلسلة ملتحمة لا يستلزمها الالتحام ولا الاتصال ، بل هى فى الواقع متناقضة مع نفسها . وناقشنا أخيراً المسائل الفلسفية المتعلقة بالاتصال واللانهاية ووجدنا أن حجج زينون ، ولو أنها صحيحة إلى حد كبير ، فإنها لا تثير أى نوع من الصعوبات العويصة . وبعد أن وضعنا أيدينا بوضوح على التعريف المزدوج للامتناهى : من أنه ذلك الذى لا يمكن بلوغه بالاستنباط الرياضى بادئين من ١ ، ومن أنه ذلك الذى له أجزاء عدد حدودها هى نفس عددها ــ وهما تعريفان يمكن التمييز بينهما بأن أولهما ترتيبى والثانى أصلى ـ رأينا أن جميع الحجج المضادة بالنسبة للانهاية وللاتصال على حد سواء باطلة ، وأنه لا يمكن البرهنة على أى تناقض معين

بالنسبة لأيهما . ولو أن بعض الفصول اللانهائية المعينة تؤدي فعلاً إلى هذه التناقضات التي لم تحل حتى الآن .

بقي أن نطبق على المكان والزمان والحركة النتائج الثلاث الرئيسية الحاصلة عن هذه المناقشة وهي (١) استحالة القطع اللانهائية الصغر (٢) تعريف الاتصال (٣) تعريف اللانهائي ومذهب الشيء . هذه التطبيقات أرجو أن تقنع القارئ بأن المناقشات السابقة التي كانت طويلة بعض الشيء لم تكن فضلاً زائداً عن الحاجة .

فهرس

الجزء الرابع

الترتيب

الجزء الخامس

اللانهاية والاتصال

صفحة

تم طبع هذا الكتاب على مطابع
دار المعارف بمصر سنة ١٩٦١